МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

Геометрия

8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ — ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

Геометрия

8 класс

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Под редакцией В.А. Садовничего

Москва
«Просвещение»
2011

Введение

Дорогие восьмиклассники!

Мы продолжим изучение свойств геометрических фигур на плоскости, познакомимся с новыми фигурами и их свойствами, введём новые понятия. При этом мы будем опираться на то, что вы узнали из учебника геометрии 7 класса.

Напомним утверждения, доказанные в этом учебнике. В первой главе рассматривались простейшие геометрические фигуры: точки, прямые, отрезки, лучи, углы. В этой главе мы доказали следующие утверждения:

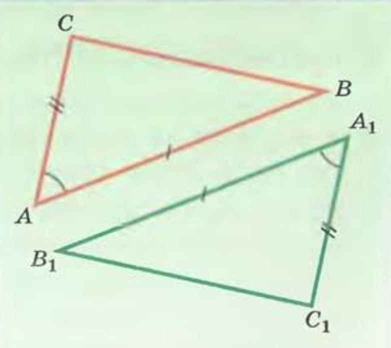
- **сумма смежных углов равна 180°;**
- **вертикальные углы равны;**
- **из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один;**
- **две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, не пересекаются.**

Вторая глава была посвящена изучению треугольников. При рассмотрении равнобедренных треугольников были доказаны три теоремы:

- **углы при основании равнобедренного треугольника равны** (теорема об углах равнобедренного треугольника);
- **если два угла треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный** (признак равнобедренного треугольника);
- **высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой** (теорема о высоте равнобедренного треугольника).

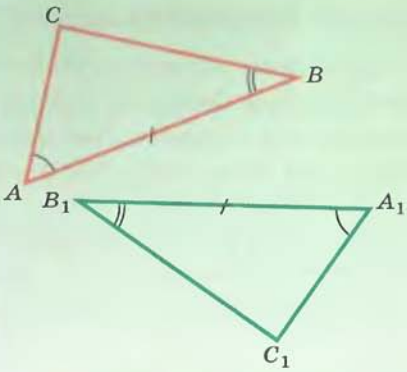
Затем мы рассмотрели три признака равенства треугольников (напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением):

- **если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны** (первый признак, рис. 1);



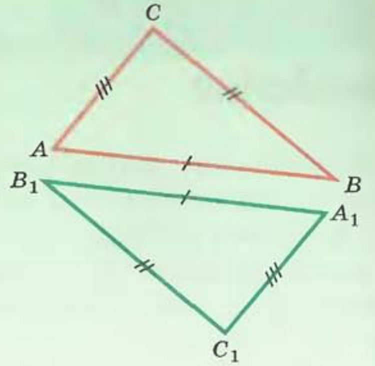
Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 1



Если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 2



Если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $CA = C_1A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 3

- **если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны** (второй признак, рис. 2);
- **если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны** (третий признак, рис. 3).

При изучении прямоугольных треугольников мы использовали свойства прямоугольника. Напомним, что прямоугольником называется четырёхугольник, у которого все углы прямые. Нами была доказана теорема:

- **противоположные стороны прямоугольника равны.**

Из этой теоремы были выведены следствия:

- **если один из углов треугольника прямой, то сумма двух других углов этого треугольника равна 90°;**
- **если в четырёхугольнике три угла прямые, то этот четырёхугольник является прямоугольником.**

С помощью первого следствия показано, что треугольники делятся на три вида: остроугольные, тупоугольные и прямоугольные (рис. 4).

Были установлены свойства прямоугольных треугольников:

- **медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы;**
- **гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета;**

Рис. 4

- **катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы;**
- **если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.**

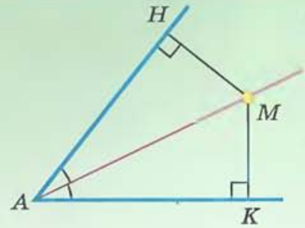
Также были рассмотрены признаки равенства прямоугольных треугольников:

- **по двум катетам;**
- **по катету и прилежащему к нему острому углу;**
- **по гипотенузе и острому углу;**
- **по катету и противолежащему углу;**
- **по гипотенузе и катету.**

С помощью признаков равенства прямоугольных треугольников были доказаны следующие теоремы:

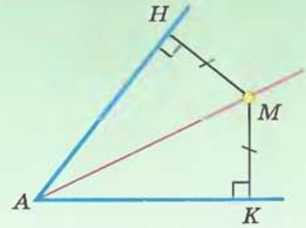
- **каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка; каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендику-**

Рис. 5



Если AM — биссектриса, $MH \perp AH$ и $MK \perp AK$, то $MH = MK$

Рис. 6



Если $MH \perp AH$ и $MK \perp AK$ и $HM = MK$, то AM — биссектриса

Рис. 7

ляре к этому отрезку (теорема о серединном перпендикуляре к отрезку и обратная ей, рис. 5);

- **каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон; каждая точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе** (теорема о биссектрисе угла, рис. 6, и обратная ей, рис. 7).

Напомним ещё три теоремы этой главы:

- **каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон** (неравенство треугольника);
- **в треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона, а против большей стороны лежит больший угол;**
- **сумма углов треугольника равна 180°.**

Из теоремы о сумме углов треугольника было выведено следствие:

- **внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним углом.**

Третья глава была посвящена изучению свойств окружности. Напомним, что окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.

Мы изучили взаимное расположение прямой и окружности и получили следующие результаты (рис. 8):

- **если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки;**
- **если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только**

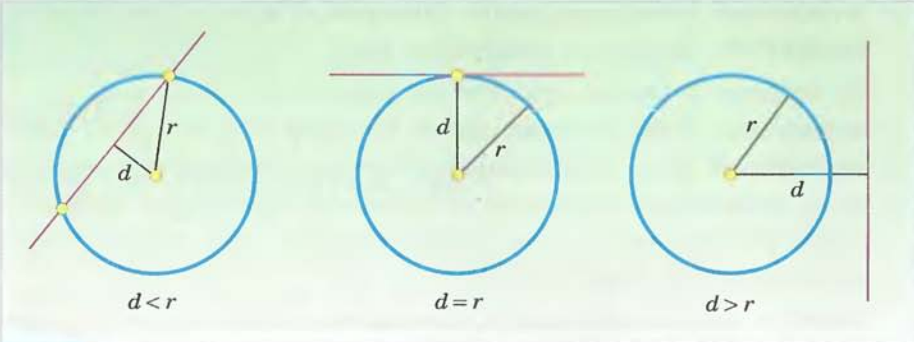


Рис. 8

одну общую точку (в этом случае прямая называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности);

- **если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.**

Были доказаны теорема о свойстве касательной и обратная ей:

- **касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания; если прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна к радиусу, проведённому в эту точку, то она является касательной.**

Напомним, что отрезками касательных, проведёнными из точки A, мы называем отрезки AB и AC, где B и C — точки касания (рис. 9). Они обладают следующим свойством:

- **отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.**

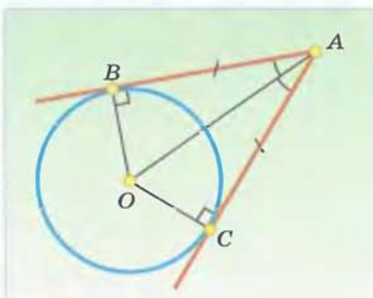


Рис. 9

В этой же главе мы ввели понятие градусной меры дуги окружности и доказали две теоремы:

- **угол между касательной и хордой измеряется половиной заключённой внутри этого угла дуги** (теорема об угле между касательной и хордой);

- **вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается** (теорема о вписанном угле).

Из теоремы о вписанном угле мы вывели три следствия:

- **вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;**
- **вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой;**
- **если диаметром окружности является гипотенуза прямоугольного треугольника, то вершина прямого угла треугольника лежит на этой окружности.**

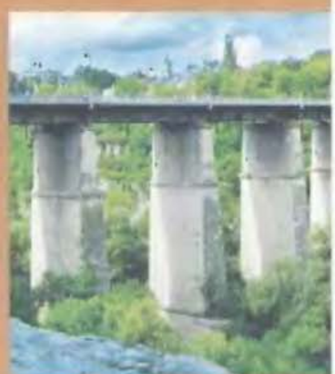
Также в третьей главе мы познакомились с новым типом задач — задачами на построение с помощью циркуля и линейки без делений. Мы научились строить с помощью этих двух инструментов: треугольник по трём сторонам; угол, равный данному; биссектрису данного угла; серединный перпендикуляр к данному отрезку; середину отрезка; прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой; прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету; касательную к данной окружности, проходящую через данную точку.

Всё, что мы изучали в 7 классе, понадобится нам для дальнейшего изучения свойств геометрических фигур и применения этих свойств на практике.

Глава 4

Параллельность

Представим себе две прямые на плоскости. Они могут пересекаться, в частности, под прямым углом, но могут и не пересекаться. Непересекающиеся прямые называются параллельными. Параллельные прямые (а точнее, отрезки параллельных прямых) мы видим на каждом шагу — два противоположных края прямоугольного стола, строчки текста, две рельсы, нотный стан и т. д. Параллельные прямые используются, например, в архитектуре и технике, столярном деле и кройке, физике и черчении. В геометрии параллельные прямые играют не меньшую роль, чем перпендикулярные. В этой главе мы будем изучать свойства параллельных прямых и в связи с этим обсудим очень важный вопрос — об аксиомах геометрии.



§ 11 Параллельные прямые

41 Признаки параллельности двух прямых

В 7 классе мы говорили о том, что две прямые либо имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют общих точек, т. е. не пересекаются.

Определение

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

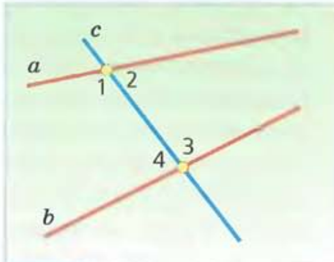


Рис. 10

Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Параллельность прямых AB и CD, a и b (отрезков MN и PQ) обозначают так: $AB \parallel CD$, $a \parallel b$ ($MN \parallel PQ$).

Рассмотрим прямые a и b, а также прямую c, пересекающую их в двух точках (рис. 10). Прямую c назовём секущей по отношению к прямым a и b. Углы 1 и 3, а также 2 и 4 назовём накрест лежащими углами, образованными при пересечении прямых a и b секущей c.

Параллельность — от греческого παράλληλος [параллелос] — рядом идущий.

ТЕОРЕМА

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы 1 и 2 равны (рис. 11, *а*). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Если предположить, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке C (рис. 11, *б*), то получится треугольник ABC, внешний угол которого (угол 1 на рисунке 11, *б*) равен углу этого треугольника, не смежному с ним. Но этого не может быть. Следовательно, прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

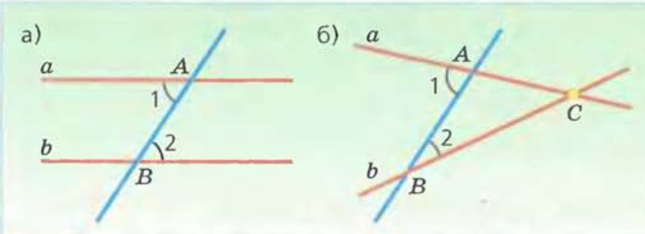


Рис. 11

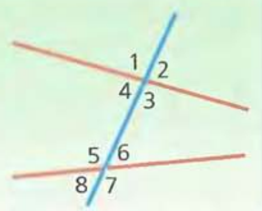


Рис. 12

При пересечении двух прямых секущей наряду с накрест лежащими углами образуются и другие углы (рис. 12). Назовём углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 соответственными, а углы 4 и 5, 3 и 6 односторонними. Из доказанной теоремы вытекают два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то эти прямые параллельны.

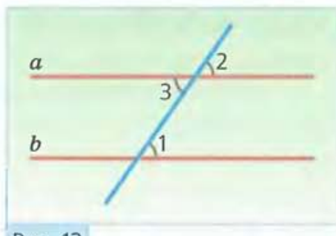


Рис. 13

Пусть соответственные углы 1 и 2 равны (рис. 13): $\angle 1 = \angle 2$. Так как вертикальные углы 2 и 3 равны, то $\angle 1 = \angle 3$, т. е. равны накрест лежащие углы 1 и 3. Следовательно, $a \parallel b$.

СЛЕДСТВИЕ 2

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то эти прямые параллельны.

Пусть сумма односторонних углов равна 180° (рис. 14): $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Сумма смежных углов 3 и 2 также равна 180°:

$$\angle 3 + \angle 2 = 180°.$$

Из этих двух равенств получаем $\angle 1 = \angle 3$, т. е. равны накрест лежащие углы 1 и 3.

Следовательно, $a \parallel b$.

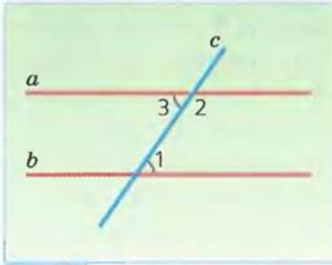


Рис. 14

42 Основная теорема о параллельных прямых

Докажем основную теорему о параллельных прямых.

ТЕОРЕМА

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство. Пусть a — данная прямая, M — точка, не лежащая на этой прямой. Докажем сначала, что через точку M проходит прямая, параллельная прямой a.

Из точки M проведём перпендикуляр MH к прямой a, а затем через точку M проведём прямую b, перпендикулярную к прямой MH (рис. 15). Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой MH, то они не пересекаются, т. е. прямые a и b параллельны.

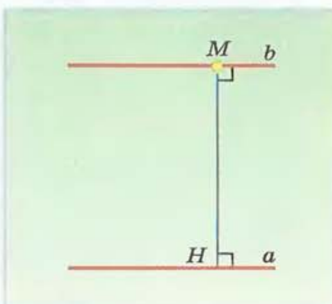


Рис. 15

Итак, через данную точку M проходит прямая b, параллельная данной прямой a.

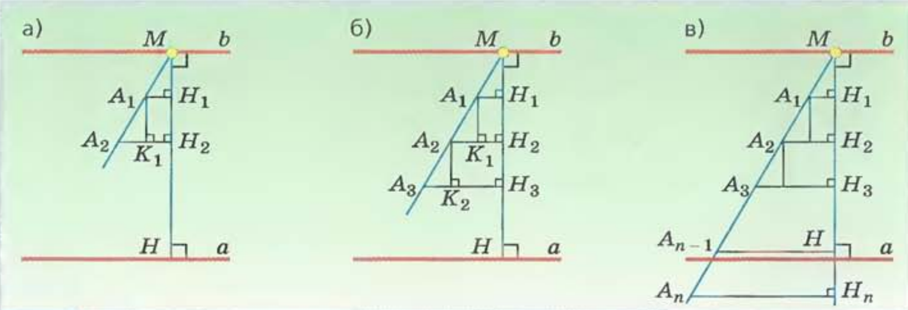


Рис. 16

✻ Докажем теперь, что любая прямая, проходящая через точку M и отличная от прямой b, пересекается с прямой a.

Рассмотрим прямую MA_1, отличную от прямой b; причём точка A_1 отмечена так, что угол A_1MH острый (рис. 16, *а*). Отложим на луче MA_1 отрезок $MA_2 = 2MA_1$ (т. е. $A_1A_2 = MA_1$) и проведём перпендикуляры A_1H_1 и A_2H_2 к прямой MH, а также перпендикуляр A_1K_1 к прямой A_2H_2. Так как в четырёхугольнике $A_1H_1H_2K_1$ три угла прямые, то этот четырёхугольник является прямоугольником, поэтому $A_1K_1 = H_1H_2$.

В прямоугольных треугольниках $A_1A_2K_1$ и MA_1H_1 равны гипотенузы A_1A_2 и MA_1, а также острые углы $\angle A_1A_2K_1$ и $\angle MA_1H_1$ (каждый из них равен $90° - \angle A_1MH_1$), поэтому $A_1K_1 = MH_1$ и, следовательно, $H_1H_2 = MH_1$ и $MH_2 = 2MH_1$.

Аналогично доказывается, что если на луче MA_1 отложим отрезок $MA_3 = 3MA_1$ (т. е. $A_2A_3 = MA_1$) и проведём перпендикуляр A_3H_3 к прямой MH, то $MH_3 = 3MH_1$ (рис. 16, *б*).

Продолжая эту процедуру, на n-м шаге получим на лучах MA_1 и MH такие точки A_n и H_n, что $MA_n = n \cdot MA_1$ и $MH_n = n \cdot MH_1$ (рис. 16, *в*).

Возьмём такое число n, что $MH_n > MH$. Тогда точки M и H_n будут лежать по разные стороны от прямой a, а так как прямые A_nH_n и a не пересекаются (поскольку они перпендикулярны к прямой MH), то точка A_n лежит по ту же сторону от прямой a, что и точка H_n. Следовательно, точки A_n и M лежат по разные стороны от прямой a, и поэтому прямая MA_1 пересекается с прямой a.

Итак, любая прямая, проходящая через точку M и отличная от прямой b, пересекается с прямой a. Теорема доказана. ✻

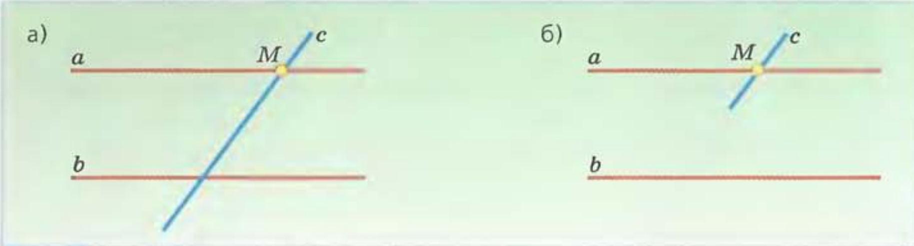


Рис. 17

Замечание. В ходе доказательства теоремы мы установили, что если на стороне MA_1 острого угла A_1MH отложить последовательно равные отрезки MA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ и провести перпендикуляры A_1H_1, A_2H_2, ..., A_nH_n к прямой MH, то на стороне MH образуются равные отрезки MH_1, H_1H_2, ..., $H_{n-1}H_n$. Отсюда следует, что если отрезок MA_1 разбить на несколько равных частей и из точек разбиения провести перпендикуляры к прямой MH, то основания этих перпендикуляров разобьют отрезок MH_1 на столько же равных частей.

Выведем два следствия из теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1

Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

В самом деле, рассмотрим параллельные прямые a и b и прямую c, пересекающую прямую a в точке M (рис. 17, *а*).

Если бы прямая c не пересекала прямую b, то через точку M проходили бы две прямые (a и c), параллельные прямой b (рис. 17, *б*), чего не может быть.

Следовательно, прямая c пересекает прямую b.

СЛЕДСТВИЕ 2

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.

В самом деле, рассмотрим две прямые a и b, каждая из которых параллельна прямой c (рис. 18, *а*), и докажем, что $a \parallel b$.

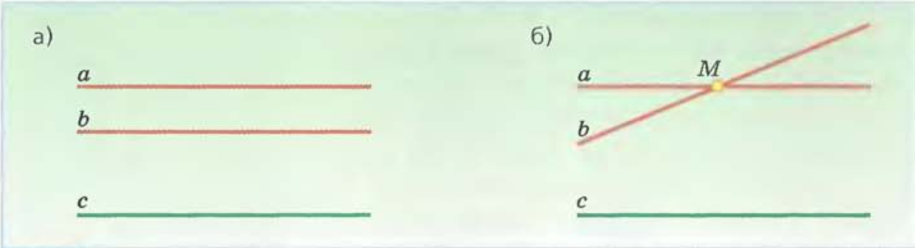


Рис. 18

Если бы прямые a и b пересекались в некоторой точке M (рис. 18, *б*), то через точку M проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c, чего не может быть. Следовательно, прямые a и b не пересекаются. Но это и означает, что $a \parallel b$.

Для построения с помощью циркуля и линейки прямой b, проходящей через данную точку M параллельно данной прямой a, можно поступить так: через точку M провести сначала прямую MH, перпендикулярную к a, а затем прямую b, перпендикулярную к прямой MH (см. рис. 15).

43 Свойства параллельных прямых

В пункте 41 мы установили, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны. Справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Доказательство. Рассмотрим параллельные прямые a и b, пересечённые секущей AB, и докажем, что накрест лежащие углы 1 и 2 (рис. 19, *а*) равны.

Предположим, что $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча AB угол CAB, равный углу 2, так, чтобы углы CAB и 2 были накрест лежащими углами при пересечении прямых AC и b секущей AB (рис. 19, *б*).

Поскольку накрест лежащие углы CAB и 2 равны, то $AC \parallel b$. Таким образом, через точку A проходят две прямые (a и AC), параллельные прямой b, чего не может быть. Следовательно, наше предположение неверно, и $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

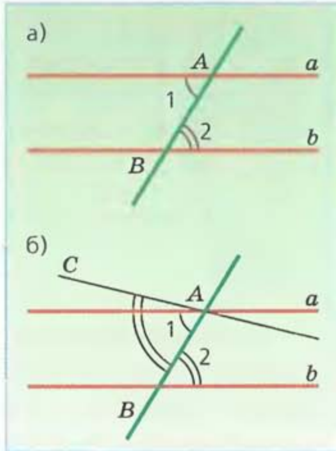


Рис. 19

Рассмотрим несколько следствий из доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЯ

1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.
2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.
3. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой.
4. Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Используя рисунок 20, выведите самостоятельно первые три следствия. Докажем следствие 4.

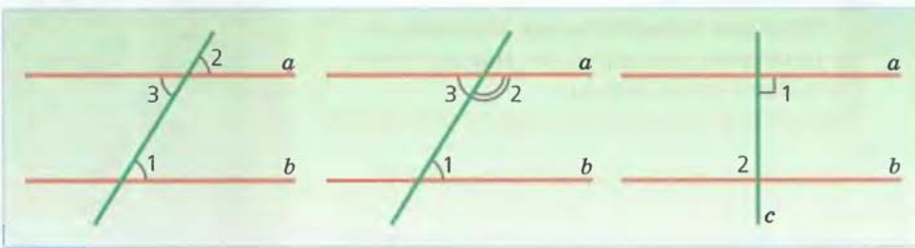


Рис. 20

Пусть a и b — параллельные прямые. Отметим на прямой a какую-нибудь точку A и проведём из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 21). Докажем, что расстояние от любой точки M прямой a до прямой b равно AB.

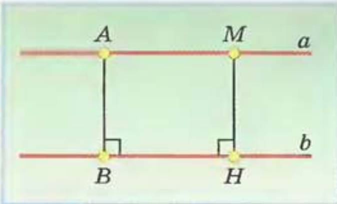


Рис. 21

Пусть MH — перпендикуляр, проведённый из точки M к прямой b. Так как $MH \perp b$, то, согласно следствию 3, $MH \perp a$. Аналогично $AB \perp a$. Поэтому четырёхугольник $ABHM$ — прямоугольник, и, следовательно, его противоположные стороны AB и MH равны.

Итак, любая точка M прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Ясно, что все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a.

Определение

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

Справедливо утверждение, обратное следствию 4.

- **Множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудалённых от неё, есть прямая, параллельная данной.**

* Пусть a — данная прямая, Φ — множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от прямой a на расстоянии d от неё. Через какую-нибудь точку A множества Φ проведём прямую b, параллельную прямой a (рис. 22). Докажем, что множество Φ совпадает с прямой b. Для этого нужно доказать, что любая точка прямой b принадлежит множеству Φ, и обратно: любая точка множества Φ лежит на прямой b.

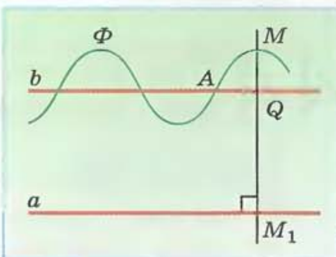


Рис. 22

Так как расстояние от точки A до прямой a равно d, то расстояние от любой точки прямой b до прямой a также равно d (следствие 4, п. 43).

Кроме того, все точки прямой b лежат по ту же сторону от прямой a, что

Рейсмус — от немецкого слова **Reißmaß**, которое происходит от слов **reißen** (чертить) и **Maß** (мера).

и точка A множества Φ, поэтому любая точка прямой b принадлежит множеству Φ.

Обратно: пусть M — произвольная точка множества Φ, MM_1 — перпендикуляр, проведённый из точки M к прямой a. Прямая MM_1 перпендикулярна к прямой a, поэтому она пересекает прямую b, параллельную a, в некоторой точке Q. Так как $QM_1 = d$, $MM_1 = d$ и точки Q и M лежат по одну сторону от прямой a, то эти точки совпадают, т. е. точка M лежит на прямой b. Утверждение доказано. ✻

Доказанное утверждение даёт обоснование практическому способу проведения прямой, параллельной данной, с помощью столярного инструмента, называемого рейсмусом. Рейсмус используется для проведения на поверхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска его металлическая игла находится на постоянном расстоянии от края бруска и, следовательно, прочерчивает отрезок, параллельный краю бруска.

44 Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

ТЕОРЕМА

Два угла с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо составляют в сумме 180°.

Доказательство. Рассмотрим углы AOB и $A_1O_1B_1$ с соответственно параллельными сторонами: $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Докажем, что эти углы либо равны, либо составляют в сумме 180°.

Если угол AOB развёрнутый, т. е. лучи OA и OB лежат на одной прямой, то угол $A_1O_1B_1$ также развёрнутый, поэтому $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

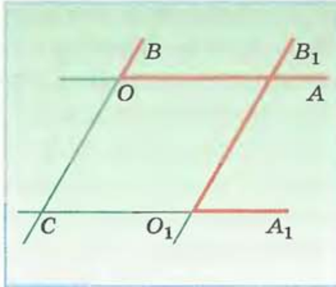


Рис. 23

Пусть угол AOB неразвёрнутый (рис. 23). Так как прямая OB пересекает прямую OA (в точке O), то она пересекает и прямую O_1A_1, параллельную прямой OA, в некоторой точке C. При этих пересечениях образовалось по четыре неразвёрнутых угла с вершинами O и C, причём любой из четырёх углов с вершиной O и любой из четырёх углов с вершиной C либо равны, либо составляют в сумме 180° (объясните почему).

Аналогично в силу параллельности прямых OB и O_1B_1 любой из четырёх неразвёрнутых углов с вершиной C и любой из четырёх неразвёрнутых углов с вершиной O_1 (см. рис. 23) либо равны, либо составляют в сумме 180°. Отсюда следует, что любые два неразвёрнутых угла с вершинами O и O_1, в частности углы AOB и $A_1O_1B_1$, либо равны, либо составляют в сумме 180°. На рисунке 23 углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны, углы AOB и CO_1B_1 с соответственно параллельными сторонами ($OA \parallel O_1C$ и $OB \parallel O_1B$) составляют в сумме 180°.

Замечание. Если угол AOB прямой, то угол $A_1O_1B_1$ также прямой, поэтому они одновременно и равны, и составляют в сумме 180°.

СЛЕДСТВИЕ

Два угла с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо составляют в сумме 180°.

Рассмотрим углы AOB и $A_1O_1B_1$ с соответственно перпендикулярными сторонами: $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$.

Если угол AOB развёрнутый, то угол $A_1O_1B_1$ также развёрнутый, поэтому $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Пусть угол AOB неразвёрнутый. Из какой-нибудь точки M, не лежащей на прямых O_1A_1 и O_1B_1, биссектрисы угла AOB проведём перпендикуляры MH и MK к сторонам этого угла (рис. 24). Прямоугольные треугольники OMH и OMK равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $\angle OMH = \angle OMK$, $\angle HOK + \angle HMK = 2(\angle HOM + \angle HMO) = 2 \cdot 90° = 180°$, т. е. $\angle AOB + \angle HMK = 180°$.

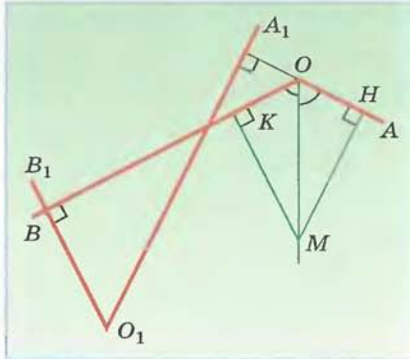


Рис. 24

Стороны углов $A_1O_1B_1$ и HMK соответственно параллельны (докажите это), поэтому либо $\angle A_1O_1B_1 + \angle HMK = 180°$, либо $\angle A_1O_1B_1 = \angle HMK$. В первом случае $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, во втором случае $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$, что и требовалось доказать.

45* Об аксиомах геометрии

В учебнике 7 класса при доказательстве утверждения о сумме острых углов прямоугольного треугольника мы исходили из того, что существует прямоугольник, две смежные стороны которого равны данным отрезкам. А откуда следует, что такой прямоугольник существует? Чтобы ответить на этот вопрос, попытаемся построить прямоугольник с заданными сторонами a и b.

Рассмотрим отрезок AD длины a (рис. 25). Через точку A под прямым углом к прямой AD проведём луч h и отложим на нём отрезок AB, равный b. Через точку B под прямым углом к лучу h проведём прямую p, а через точку D под прямым углом к прямой AD проведём прямую q. Наше построение завершено, но что мы получили?

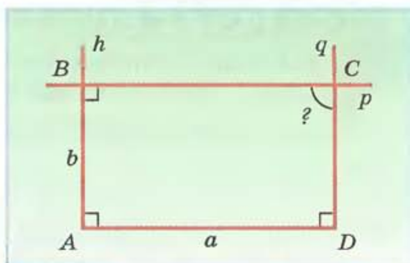


Рис. 25

Если прямые p и q пересекутся в некоторой точке C, то мы получим четырёхугольник $ABCD$ с прямыми углами A, B и D. Но откуда следует, что угол C четырёхугольника будет прямым? Ведь наше доказательство этого утверждения в 7 классе (вспомните его) как раз и основывалось на существовании прямоугольника. А может быть, прямые p и q не пересекутся, т. е. окажутся параллельными. Тогда даже четырёхугольника не получится.

Таким образом, вопрос о существовании прямоугольника с двумя заданными смежными сторонами остаётся пока открытым, и мы ответим на него чуть позже. Наряду с ним возникает и ещё ряд вопросов, связанных с доказательствами теорем. В наших доказательствах мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. Естественно поставить вопрос: а на чём основаны доказательства самых первых теорем геометрии, рассмотренных нами? Вспомним, например, доказательство теоремы:

- **из точки, не лежащей на прямой, нельзя провести два перпендикуляра к этой прямой.**

Мы предположили, что из точки A можно провести два перпендикуляра к данной прямой, мысленно перегнули плоскость по этой прямой, отметили точку B, на которую наложилась точка A, и обнаружили, что через точки A и B проходят две прямые, чего не может быть. Таким образом, мы исходили из того, что

- **через две точки проходит только одна прямая.**

А как доказать это утверждение? Едва ли кто-то отважится его отрицать, но как его доказывать — непонятно.

Всё это наводит на мысль, что если каждое доказательство должно на что-то опираться, то не все утверждения можно доказать. Некоторые из них, самые очевидные, следует принять в качестве исходных положений, а затем уже на их основе доказывать теоремы и вообще строить всю геометрию. Такие исходные положения называются аксиомами.

Например, аксиомами являются утверждения:

- **на каждой прямой имеются точки;**
- **имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой;**
- **через любые две точки проходит прямая, и притом только одна** (эта аксиома была сформулирована ещё в 7 классе).

Мы видим, что все эти аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Полный список аксиом планиметрии содержится в конце книги (с. 141—145).

Аксиома — от греческого αξιομα [аксиома] — достоинство, уважение, авторитет.
Постулат — от латинского postulatum (требование). Это слово появилось в латинских переводах «Начал» Евклида.

Отметим, что такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путём рассуждений доказываются другие утверждения, зародился ещё в глубокой древности и нашёл воплощение в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого учёного Евклида [7]—[9][1]. Геометрия, изложенная в «Началах», называется евклидовой геометрией.

Вернёмся теперь к вопросу о существовании прямоугольника. В «Началах» Евклида содержится аксиома (пятый постулат Евклида), которая гласит:

- **если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов меньше 180°, то эти прямые пересекаются по ту сторону от секущей, по которую расположены указанные углы.**

В современных учебниках пятый постулат часто заменяют другой, равносильной ему, но более простой по формулировке аксиомой (её называют аксиомой параллельных прямых):

- **через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.**

Опираясь на это утверждение, можно доказать, что прямоугольник, две смежные стороны которого равны данным отрезкам, существует. С другой стороны, французский математик А. К. Клеро (1713—1765)

---

[1] Цифры в квадратных скобках указывают на номер книги в списке литературы (с. 171).

доказал, что из существования хотя бы одного прямоугольника следует аксиома параллельных прямых. В нашем курсе используется такая аксиома:

- **для любых двух отрезков существует прямоугольник, две смежные стороны которого равны этим отрезкам.**

Поэтому утверждение, названное аксиомой параллельных прямых, у нас не является аксиомой, а доказывается как теорема. Вообще для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Например, как установил французский математик А. М. Лежандр (1752—1833), вместо аксиомы существования прямоугольника или аксиомы параллельных прямых можно принять в качестве аксиомы утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°. От различных систем аксиом евклидовой геометрии требуется лишь, чтобы они приводили к одним и тем же выводам.

Отметим, что евклидова геометрия не является единственно возможной. Так, в первой половине XIX в. великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) открыл ещё одну геометрию, называемую теперь геометрией Лобачевского. В ней аксиома параллельных прямых заменена противоположным по смыслу утверждением:

- **через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, не пересекающих эту прямую.**

В настоящее время геометрия Лобачевского находит широкое применение не только в математике, но и в разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д.

В 1895 г. была учреждена престижная премия имени Н. И. Лобачевского, которая присуждается за выдающиеся работы по геометрии, и, прежде всего, неевклидовой геометрии. В 1991 г. учреждена также медаль имени Н. И. Лобачевского, которой награждаются учёные, внёсшие большой вклад в развитие геометрии. Имя Н. И. Лобачевского, родившегося в Нижнем Новгороде, присвоено Нижегородскому государственному университету.

Медаль Н. И. Лобачевского.

Вопросы и задачи

1. а) Параллельны ли прямые a и b, изображённые на рисунке 26, если: $\angle 3 = \angle 5$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 3 + \angle 6 = 180°$; $\angle 3 = \angle 6 = 90°$? Ответы обоснуйте.

б) Вершины A и D равных треугольников ABC и BCD лежат по разные стороны от прямой BC, причём $AC = BD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

в) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противоположной основанию, параллельна основанию.

г) Исходя из рисунка 27, докажите, что $BC \parallel AD$.

д) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M, равноудалённая от концов его биссектрисы AD. Докажите, что $DM \parallel AC$.

е) Дуги AB и BC окружности равны. Докажите, что прямая AC параллельна касательной BD.

2. а) Параллельны ли прямые a и b, изображённые на рисунке 26, если: $\angle 1 = \angle 7$; $\angle 1 = \angle 8 = 90°$; $\angle 4 = \angle 8$; $\angle 2 + \angle 7 = 180°$? Ответы обоснуйте.

б) Вершины A и D равных треугольников ABC и BCD лежат по разные стороны от прямой BC, причём $AC = BD$. Докажите, что $AC \parallel BD$.

в) Докажите, что если биссектриса внешнего угла с вершиной A треугольника ABC не параллельна стороне треугольника, то $AB \neq AC$.

г) Отрезки AC и BD пересекаются в точке O, причём $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

д) Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC равен 72°, отрезки BD и DE — биссектрисы треугольников ABC и BCD. Докажите, что $AB \parallel DE$.

е) Две хорды AB и CD окружности не имеют общих точек, а дуги AC и BD, заключённые между ними, равны (рис. 28). Докажите, что $AB \parallel CD$.

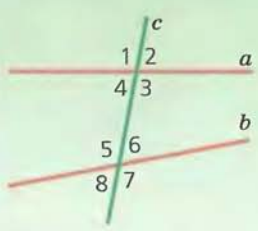


Рис. 26

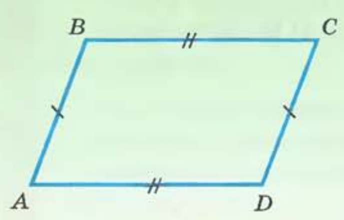


Рис. 27

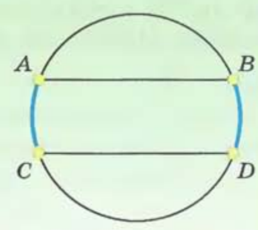


Рис. 28

3. а) Прямая a пересекает прямую, содержащую сторону AD прямоугольника $ABCD$. Пересекает ли прямая a прямую BC? Ответ обоснуйте.

б) На рисунке 29 углы 1, 3 и 4 равны. Докажите, что $a \parallel c$.

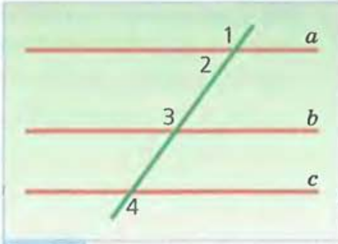


Рис. 29

в) Постройте прямую, проходящую через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне BC.

г) Постройте касательную к данной окружности, параллельную данной прямой.

4. а) Точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC, внешний угол с вершиной B треугольника ABC равен 105°, а внешний угол с вершиной C треугольника DBC равен 75°. Прямая a пересекает прямую CD. Пересекает ли прямая a прямую AB? Ответ обоснуйте.

б) На рисунке 29 углы 3 и 4 равны, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Докажите, что $a \parallel c$.

в) Постройте прямую, проходящую через середину стороны AB треугольника ABC параллельно медиане AM.

г) Постройте касательную к данной окружности, перпендикулярную к данной прямой. Сколько решений имеет эта задача?

5. а) Один из односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в два раза больше другого. Найдите эти углы.

б) Через вершину A равнобедренного треугольника ABC с основанием AC проведена прямая AD, параллельная BC, точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите угол CAD, если внешний угол с вершиной B треугольника ABC равен 50°.

в) В четырёхугольнике $ABCD$ отрезок BD проходит через середину отрезка AC и $AD \parallel BC$. Докажите, что $AB = CD$.

г) Через вершину C треугольника ABC, в котором $\angle B = 30°$ и $BC = 14$ см, проведена прямая a, параллельная AB. Найдите расстояние от точки A до прямой a.

д) Отрезки AB и CD — хорды окружности, $AB \parallel CD$. Докажите, что $AC = BD$.

е) Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q, причём $PQ \parallel BC$. Докажите, что $AB = AC$.

6. а) Один из односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, больше другого на 34°. Найдите эти углы.

б) Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то этот треугольник равнобедренный.

в) На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка M, а на стороне BC — точка N так, что $BN = NM$ и $AB \parallel MN$. Докажите, что $AM = MC$.

г) Расстояние от вершины C треугольника ABC до прямой AB вдвое меньше BC. Через точку A проведена прямая a, параллельная BC. Найдите расстояние от точки C до прямой a, если $AB = 10$ см.

д) На окружности отмечены точки A, B, C, M и N так, что луч BM — биссектриса угла ABC, хорда MN параллельна AB. Докажите, что $BC = MN$.

е) Хорда AB окружности с центром O параллельна прямой, касающейся этой окружности в точке C. Докажите, что прямая OC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

7. а) На рисунке 30 точки B и C равноудалены от прямой AD и $AO = OD$. Докажите, что $AB = CD$.

б) Из точки M, лежащей внутри угла, равного 72°, проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам угла. Найдите угол PMQ.

в) Постройте прямую, параллельную данной прямой, так, чтобы расстояние между этими прямыми было равно длине данного отрезка. Сколько решений имеет эта задача?

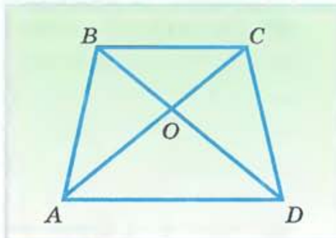


Рис. 30

г) Даны точки A и B и отрезок PQ. Постройте точки, удалённые от прямой AB на расстояние PQ и равноудалённые от концов отрезка AB.

д) Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон.

8. а) На рисунке 30 точки B и C равноудалены от прямой AD и $\angle OAD = \angle ODA$. Докажите, что $AC = BD$.

б) Угол AOB равен 113°. Из точки M проведены перпендикуляры MP и MQ к прямым AO и BO. Найдите угол PMQ.

в) Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему углу.

г) Даны отрезок PQ и угол ABC, через вершину которого вне угла проведена прямая a. Внутри угла ABC постройте точку, удалённую от прямой a на расстояние PQ и равноудалённую от прямых AB и BC.

д) Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведённой к этой стороне.

§ 12 Вписанная и описанная окружности

46 Теорема о пересечении биссектрис треугольника

В этом пункте мы вернёмся к одному из вопросов, возникших ещё в 7 классе: верно ли, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке? Теперь можно ответить на этот вопрос.

ТЕОРЕМА

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC (рис. 31, *а*). Докажем, что точка O лежит на биссектрисе CC_1.

Проведём из точки O перпендикуляры OD, OE и OF соответственно к прямым AB, BC и CA (рис. 31, *б*). По теореме о биссектрисе угла $OD = OF$ и $OD = OE$, поэтому $OF = OE$. Таким образом, точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла. Тем самым все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Теорема доказана.

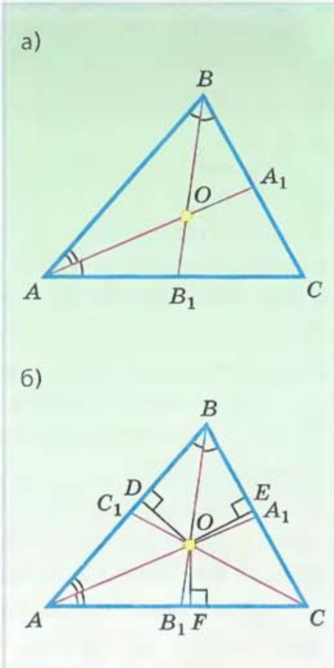


Рис. 31

47 Вписанная окружность

Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в треугольник, а треугольник называется описанным около окружности. Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

ТЕОРЕМА

В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

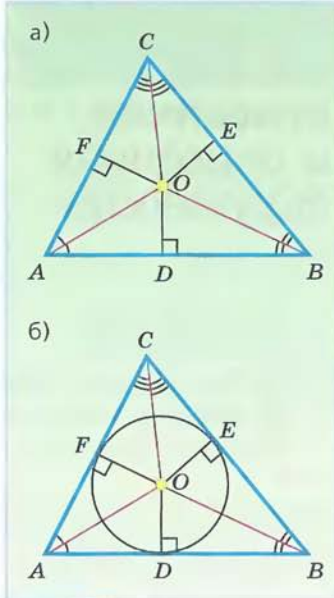


Рис. 32

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис треугольника ABC и проведём из этой точки перпендикуляры OD, OE и OF к сторонам AB, BC и CA (рис. 32, *а*). Докажем сначала, что окружность с центром O радиуса OD является вписанной в треугольник ABC.

Поскольку точка O равноудалена от сторон треугольника ABC (п. 46), т. е. $OD = OE = OF$, то окружность с центром O радиуса OD проходит через точки D, E и F (рис. 32, *б*). Стороны треугольника ABC перпендикулярны к её радиусам OD, OE и OF, поэтому они касаются этой окружности. Следовательно, окружность с центром O радиуса OD является вписанной в треугольник ABC.

Докажем теперь, что в треугольник можно вписать только одну окружность. Допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудалён от сторон треугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника; радиус каждой окружности равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Таким образом, центры и радиусы этих окружностей совпадают, поэтому совпадают и сами окружности. Теорема доказана.

48 Теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

В пункте 46 мы доказали, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Оказывается, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника также пересекаются в одной точке.

ТЕОРЕМА

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров c и a к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 33). Докажем, что точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC.

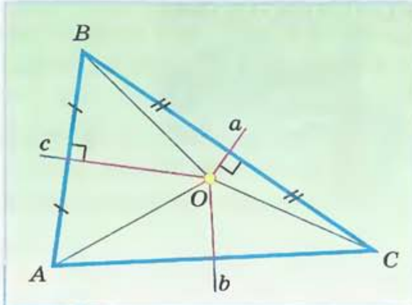


Рис. 33

По теореме о серединном перпендикуляре к отрезку $OA = OB$ и $OB = OC$, поэтому $OA = OC$. Таким образом, точка O равноудалена от концов отрезка AC и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре b к этому отрезку. Итак, все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O, и эта точка равноудалена от вершин A, B и C. Теорема доказана.

Замечание. Мы начали доказательство теоремы с того, что обозначили буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров c и a к сторонам AB и BC. А верно ли, что прямые a и c пересекаются? Докажем, что это верно.

* Проведём через точку B прямые p и q так, что $p \perp AB$ и $q \perp BC$ (рис. 34). Поскольку прямые p и c перпендикулярны к прямой AB, то $p \parallel c$.

Аналогично доказывается, что $q \parallel a$. Прямая p пересекает прямую q (в точке B), поэтому она пересекает и параллельную ей прямую a (см. рис. 34); прямая a пересекает прямую p, поэтому она пересекает и параллельную ей прямую c. Итак, прямая a пересекает прямую c, что и требовалось доказать. *

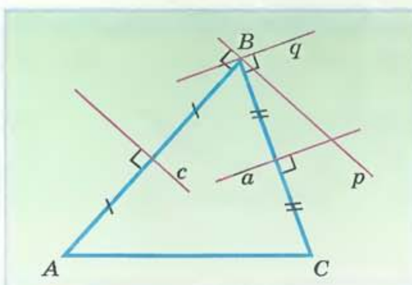


Рис. 34

49 Описанная окружность

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около треугольника, а треугольник называется вписанным в окружность. Докажем теорему об окружности, описанной около треугольника.

ТЕОРЕМА

Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC (рис. 35, *а*). Докажем сначала, что окружность с центром O радиуса OA является описанной около треугольника ABC.

Точка O равноудалена от вершин треугольника ABC (п. 48), т. е. $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через точки A, B, C (рис. 35, *б*) и, следовательно, является окружностью, описанной около треугольника ABC.

Докажем теперь, что около треугольника можно описать только одну окружность. Допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудалён от вершин треугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам; радиус каждой окружности равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Таким образом, центры и радиусы этих окружностей совпадают, поэтому совпадают и сами окружности. Теорема доказана.

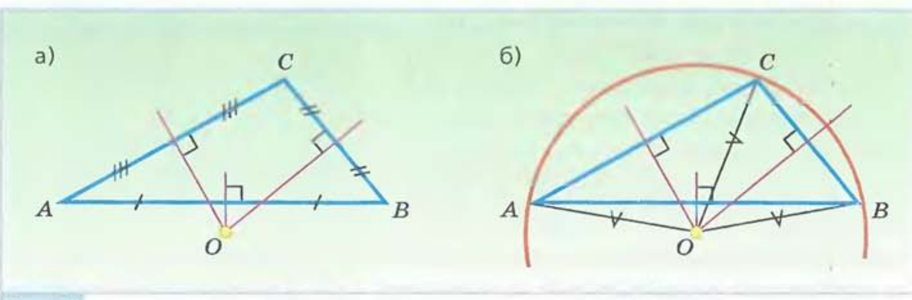


Рис. 35

Вопросы и задачи

9. а) Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, причём $CO = 10$ см и $\angle C = 60°$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC.
б) В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Найдите угол BOC, если $\angle A = 2\alpha$.
в) Стороны AB, BC и CA треугольника ABC, равные 6 см, 10 см и 14 см, касаются окружности в точках D, E и F. Найдите AD, DB, BE, EC, CF и FA.
г) На сторонах AB и AC треугольника ABC, описанного около окружности с центром O, отмечены точки D и E так, что $OD \parallel AC$ и $OE \parallel AB$. Докажите, что $AD = DO = OE = EA$.

10. а) Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что луч AO — биссектриса угла BAC.
б) Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол ACO, если $\angle AOB = 125°$.
в) Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с периметром 24 см и гипотенузой, равной 10 см.
г) Внутри треугольника ABC отмечена точка M, а на стороне BC — точки D и E так, что $DM \parallel AB$, $EM \parallel AC$, $BD = DM$ и $CE = EM$. Докажите, что точка M равноудалена от сторон треугольника ABC.

11. а) Биссектриса угла A равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекает серединный перпендикуляр к стороне AC в точке O. Найдите BO, если $AO = 5$ см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 5 см.
в) Биссектриса угла A равнобедренного треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найдите углы A, B и C, если $\angle BDC = 70°$.
г) Докажите, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

12. а) Серединные перпендикуляры к сторонам равнобедренного треугольника пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до середины основания, если боковая сторона равна a, а один из углов треугольника равен 120°.
б) Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Докажите, что $\angle A = 90°$.
в) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AB = 14$ см, $\angle A = 3\angle C$ и $\angle B = 2\angle C$.
г) Докажите, что точка пересечения биссектрисы угла треугольника с описанной около этого треугольника окружностью лежит на серединном перпендикуляре к одной из сторон треугольника.

Вопросы для повторения

1. Дайте определение параллельных прямых.
2. Посмотрите на рисунок 12 и назовите накрест лежащие, соответственные и односторонние углы.
3. Докажите, что две прямые параллельны, если при пересечении их секущей: а) накрест лежащие углы равны; б) соответственные углы равны; в) сумма односторонних углов равна 180°.
4. Сформулируйте и докажите основную теорему о параллельных прямых.
5. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.
6. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.
7. Объясните, как с помощью циркуля и линейки построить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой.
8. Докажите, что если две параллельные прямые пересечены секущей, то а) накрест лежащие углы равны; б) соответственные углы равны; в) сумма односторонних углов равна 180°.
9. Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой.
10. Докажите, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.
11. Что называется расстоянием между двумя параллельными прямыми?
12. Докажите, что множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудалённых от неё, есть прямая, параллельная данной.
13. Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно параллельными сторонами и следствие из неё.
14. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении биссектрис треугольника.
15. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в треугольник.
16. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
17. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника.

Дополнительные задачи

§ 11

13. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = DE$ и $\angle BAE = \angle CAE$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

14. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что $DE \parallel AC$.

15. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC, CD и DA равны. На стороне BC отмечена точка M так, что $DM = MB$. Докажите, что $DM \parallel AB$.

16*. Даны прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то $a \parallel b$.

17. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы не равны, то эти две прямые пересекаются.

18. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE равнобедренный.

19. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. На стороне BC отмечены точки P и Q так, что $OP \parallel AB$ и $OQ \parallel AC$. Докажите, что периметр треугольника OPQ равен BC.

20. Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что биссектрисы соответственных углов параллельны.

21. Прямая, параллельная основанию BC равнобедренного треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

22. На рисунке 36 $\angle A = 135°$, $\angle B = 85°$ и $\angle C = 140°$. Докажите, что $AE \parallel CD$.

23. На рисунке 37 $AE \parallel CD$, $\angle A = 130°$ и $\angle C = 140°$. Докажите, что $AB \perp BC$.

24. Докажите, что если касательные, проведённые через концы хорды, параллельны, то эта хорда — диаметр окружности.

25. Точка C лежит на отрезке AB, а точки P и Q — по одну сторону от прямой AB, причём $AP \parallel BQ$, $AP = AC$ и $BQ = BC$. Докажите, что $CP \perp CQ$.

26. Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках P и Q. Докажите, что $PQ = BP + CQ$.

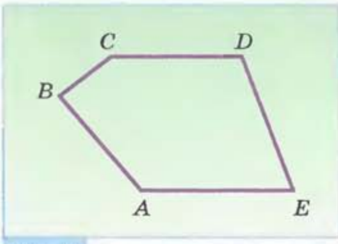


Рис. 36

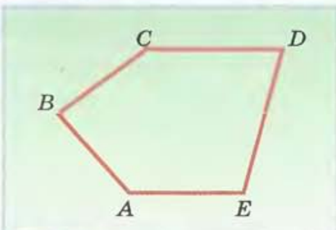


Рис. 37

27. На сторонах AB и AC данного треугольника ABC постройте такие точки P и Q, что $PQ = BP + CQ$ и $PQ \parallel BC$.

28. На параллельных прямых a и b отмечены точки A и B, а на отрезке AB — точка C. Докажите, что сумма расстояний от точки C до прямых a и b равна расстоянию между прямыми a и b.

29. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M, для которой $MA = MB = MC = AC = 14$ см. Найдите расстояние между прямой AB и прямой, проходящей через точку M параллельно AB.

30. Что представляет собой множество всех точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых?

31. Прямые a и b параллельны. Что представляет собой множество середин всех отрезков AB, где $A \in a$, $B \in b$?

32. Что представляет собой множество всех точек, лежащих внутри угла ABC и удалённых от прямой BC на данное расстояние?

33. Сторона AB треугольника ABC продолжена на отрезок BP, равный AB, а медиана AM — на отрезок MQ, равный AM. Докажите, что $BC = PQ$.

34. Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, находящуюся на расстоянии PQ от прямой b. Сколько решений имеет эта задача?

35*. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к ней, и медиане, проведённой к одной из двух других сторон.

36. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных параллельных прямых.

§ 12

37. Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. При этом $AD = DM$ и $CE = EM$. Докажите, что луч BM — биссектриса угла ABC.

38. Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с периметром P и гипотенузой, равной a.

39. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности с боковой стороной делит эту сторону на отрезки, равные 5 см и 7 см. Найдите периметр треугольника.

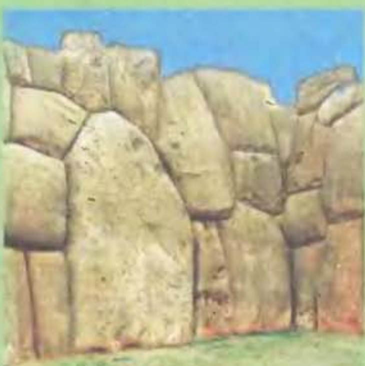
40. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке D. Докажите, что $AD = p - BC$, где p — полупериметр треугольника.

41. Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

42. Отрезки AH, AM и AD — высота, медиана и биссектриса треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$. Докажите, что точка D лежит на отрезке HM.

Глава 5
Многоугольники

До сих пор мы рассматривали самые простые многоугольники — треугольники и прямоугольники. В этой главе перейдём к изучению свойств более сложных многоугольников: различных четырёхугольников, а также правильных многоугольников. Многие из этих фигур обладают симметрией. Симметрия играет важную роль не только в геометрии, но и в других науках, в архитектуре, искусстве, технике. Симметричные предметы вы не раз видели в природе и окружающей обстановке — узоры на коврах и обоях комнаты, рисунок на крыльях бабочки, цветы, фасады зданий, различные шестерёнки и многое другое.



§ 13 Многоугольник

50 Выпуклый многоугольник

Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ так, что смежные отрезки, т. е. A_1A_2 и A_2A_3, A_2A_3 и A_3A_4, ..., не лежат на одной прямой. Точки A_1 и A_n могут быть различными (рис. 38, *а*), а могут совпадать (рис. 38, *б*). Такая фигура, составленная из отрезков, называется ломаной. Если точки A_1 и A_n совпадают, то ломаная называется замкнутой (см. рис. 38, *б*), а отрезки $A_{n-1}A_n$ и A_1A_2 также считаются смежными.

Два смежных отрезка ломаной имеют общий конец. Ломаная называется простой, если её несмежные отрезки не имеют общих точек. Ломаные на рисунках 38, *а*, *б* — простые, а ломаная на рисунке 38, *в* не является простой.

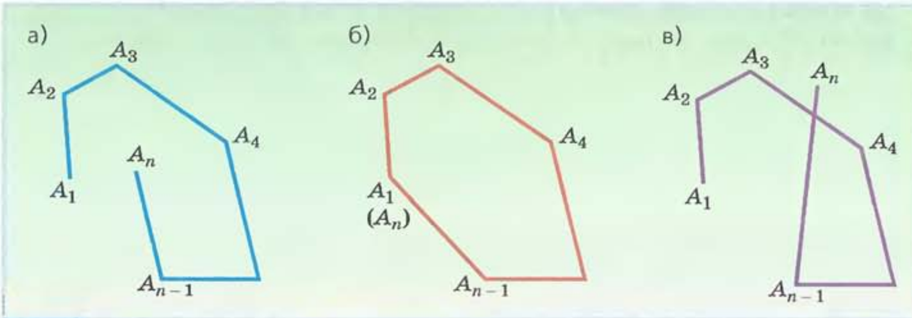


Рис. 38

Простая замкнутая ломаная называется многоугольником. Отрезки, из которых составлен многоугольник, называются его сторонами, а концы сторон — вершинами многоугольника. Многоугольник с n вершинами A_1, A_2, ..., A_n называете n-угольником и обозначается $A_1A_2...A_n$. Сумма длин всех сторон называется периметром многоугольника. Примерами многоугольников являются треугольник и четырёхугольник.

На рисунках 39, *а*, *б* изображены четырёхугольник $ABCD$ и шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Ломаная $B_1B_2B_3B_4B_5B_1$, изображённая на рисунке 39, *в*, не является многоугольником, так как эта ломаная хотя и замкнутая, но не является простой.

Две вершины многоугольника, являющиеся концами одной стороны, называются соседними. Отрезок, соединяющий две вершины, не

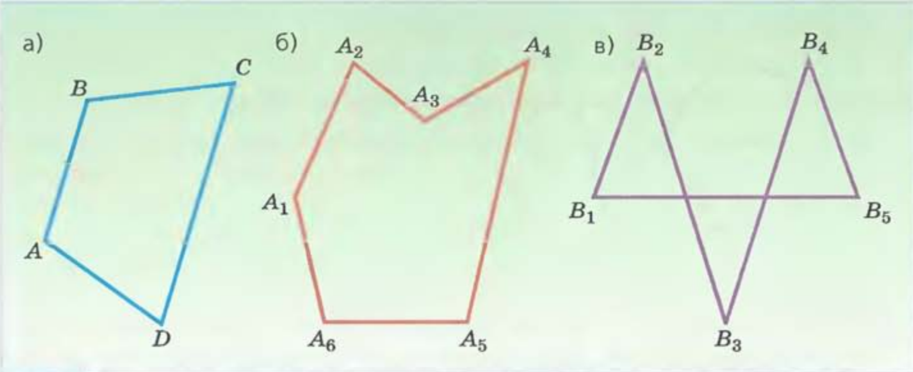


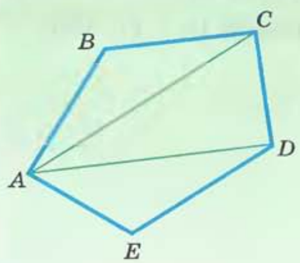
Рис. 39

являющиеся соседними, называется диагональю многоугольника (рис. 40).

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник — описанным около этой окружности.

Четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 41 описан около окружности с центром O, а четырёхугольник $ABPQ$ не является описанным около этой окружности, так как сторона PQ не касается окружности.

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник — вписанным в эту окружность. Четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 42 вписан в окружность с центром O, а четырёхугольники $AMCD$ и $AKCD$ не являются вписанными в эту окружность, так как вершины M и K не лежат на окружности.



Отрезки AC и AD — диагонали пятиугольника $ABCDE$

Рис. 40

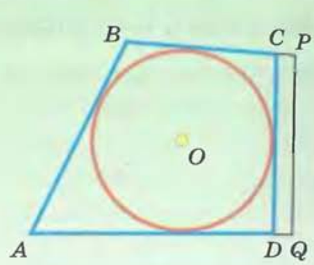


Рис. 41

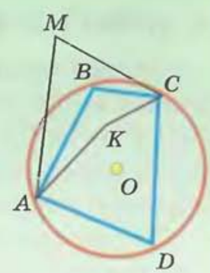


Рис. 42

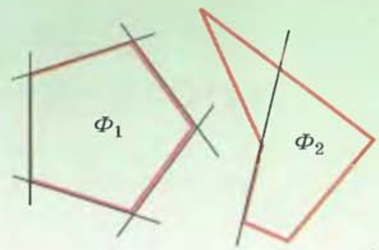


Рис. 43

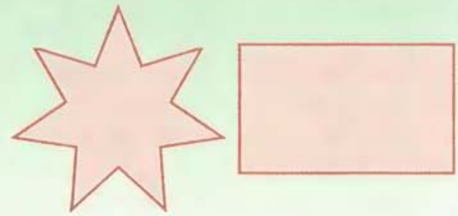


Рис. 44

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону. Многоугольник Φ_1 на рисунке 43 — выпуклый, а многоугольник Φ_2 — невыпуклый.

Рассматривая различные многоугольники, можно заметить, что каждый многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая — внешней областью многоугольника. (Доказать это утверждение непросто; см., например, [3] и [11].) На рисунке 44 внутренние области многоугольников закрашены. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ выпуклого многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ называются углами многоугольника (рис. 45). Внутренняя область выпуклого многоугольника — это общая часть внутренних областей всех его углов. Фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

Найдём сумму углов выпуклого n-угольника. Соединив одну из его вершин диагоналями с другими вершинами, получим $n-2$ треугольника (см. рис. 45), сумма углов которых равна сумме углов данного n-угольника. Поскольку сумма углов каждого треугольника равна 180°, то сумма углов n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. Таким образом,

- **сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.**

Отсюда следует, что если при каждой вершине выпуклого многоугольника взято по одному внешнему углу (т. е. углу, смежному с углом многоугольника), то сумма этих внешних углов равна 360° (докажите это).

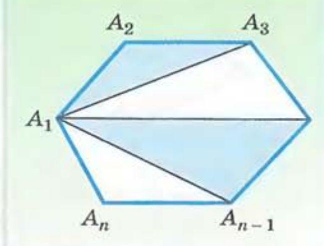


Рис. 45

При выводе формулы суммы углов выпуклого n-угольника мы исходили из того, что:

- **диагонали выпуклого n-угольника, проведённые из одной вершины, разделяют его на $n-2$ треугольника.**

Доказательство этого наглядно очевидного утверждения можно найти, например, в [3]. Там же доказано, что

- **многоугольник, вписанный в окружность, является выпуклым;**
- **многоугольник, описанный около окружности, является выпуклым.**

51 Четырёхугольник

Четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали (рис. 46). Две вершины четырёхугольника, являющиеся концами одной и той же диагонали, называются противоположными; две несмежные стороны четырёхугольника также называются противоположными. На рисунке 46 противоположными вершинами являются A_1 и A_3, A_2 и A_4, а противоположными сторонами — A_1A_2 и A_3A_4, A_2A_3 и A_4A_1.

Ясно, что любой треугольник является выпуклым многоугольником. Четырёхугольники же бывают как выпуклыми, так и невыпуклыми. На рисунке 46, *а* изображен выпуклый четырёхугольник, а на рисунке 46, *б* — невыпуклый.

Каждая диагональ выпуклого четырёхугольника разделяет его на два треугольника (см. рис. 46, *а*); одна из диагоналей невыпуклого четырёхугольника также разделяет его на два треугольника (на рисунке 46, *б* такой диагональю является A_1A_3); диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются (см. рис. 46, *а*), а невыпуклого не пересекаются (рис. 46, *б*). Доказательства этих утверждений приведены на с. 147.

В отличие от треугольника в четырёхугольник не всегда можно вписать окружность. Например, нельзя вписать окружность в прямоугольник, не являющийся квадратом (рис. 47). Объясняется это тем, что

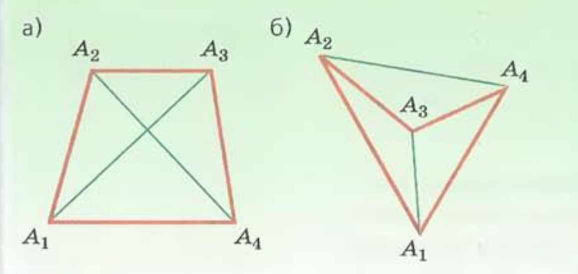


Рис. 46

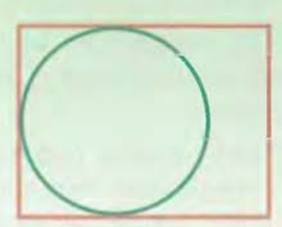


Рис. 47

стороны описанного четырёхугольника обладают следующим свойством:

- **в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны** (доказательство приведено на рисунке 48).

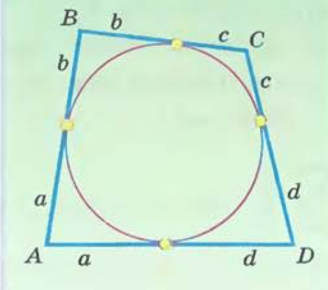


Рис. 48

Справедливо и обратное утверждение, выражающее признак описанного четырёхугольника:

- **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность** (см. задачу 79 и указание к ней).

Около четырёхугольника (в отличие от треугольника) не всегда можно описать окружность. Например, нельзя описать окружность около четырёхугольника $AMCD$, изображённого на рисунке 42. Это связано с тем, что углы вписанного четырёхугольника обладают следующим свойством:

- **в любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.**

В самом деле, по теореме о вписанном угле $\angle A = \frac{1}{2}\smile BCD$, $\angle C = \frac{1}{2}\smile BAD$ (рис. 49), поэтому

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2}360° = 180°.$$

Аналогично доказывается, что $\angle B + \angle D = 180°$.

Справедливо и обратное утверждение, выражающее признак вписанного четырёхугольника:

- **если сумма противоположных углов выпуклого четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность** (см. задачу 78 и указание к ней).

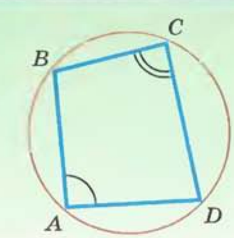


Рис. 49

52 Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник называется правильным, если равны все его стороны и равны все его углы. Примерами правильных многоугольников являются равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке 50 изображены правильные пятиугольник, шестиугольник и семиугольник. Докажем теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

ТЕОРЕМА

Около правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$ (рис. 51). Докажем сначала, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$.

Поскольку $\angle A_1 = \angle A_2$, то углы, прилежащие к стороне A_1A_2 треугольника OA_1A_2, равны, поэтому $OA_1 = OA_2$. Треугольники OA_1A_2 и OA_3A_2 равны по первому признаку равенства треугольников ($A_2A_1 = A_2A_3$, A_2O — общая сторона и $\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$). Следовательно, $OA_3 = OA_1$.

Аналогично доказывается, что $\triangle OA_2A_3 = \triangle OA_4A_3$, $\triangle OA_3A_4 = \triangle OA_5A_4$, ..., поэтому $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$, ...

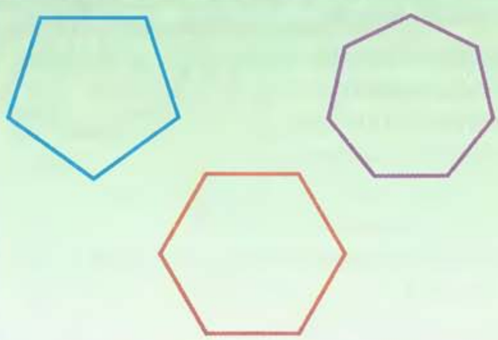


Рис. 50

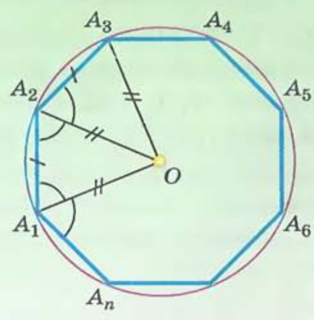


Рис. 51

Таким образом, $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$. Из этого следует, что окружность с центром O радиуса OA_1 проходит через все вершины многоугольника, т. е. является описанной около этого многоугольника.

Через точки A_1, A_2 и A_3 проходит только одна окружность. Следовательно, около многоугольника $A_1A_2...A_n$ можно описать только одну окружность. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

ТЕОРЕМА

В правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Доказательство. Пусть O — центр окружности, описанной около правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$ (рис. 52). Проведём высоту OH_1 треугольника OA_1A_2. Докажем сначала, что окружность с центром O радиуса OH_1 является вписанной в многоугольник $A_1A_2...A_n$.

В ходе доказательства теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \ldots = \triangle OA_nA_1$, поэтому высоты OH_1, OH_2, ..., OH_n этих треугольников также равны. Следовательно, окружность с центром O радиуса OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. является окружностью, вписанной в данный многоугольник.

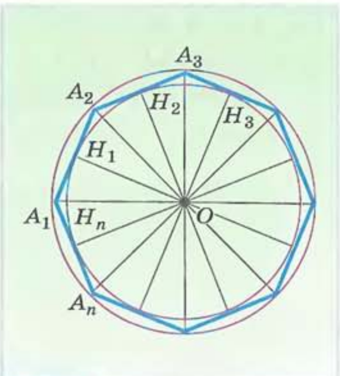


Рис. 52

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна. Предположим, что имеются две окружности, вписанные в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда центр каждой из них равноудалён от сторон многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения биссектрис углов многоугольника.

Радиус каждой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, центры и радиусы этих окружностей совпадают, поэтому совпадают и сами окружности. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Центр этих окружностей называется <u>центром правильного многоугольника</u>.

Замечание. Многие правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Построения правильного треугольника и правильного четырёхугольника, т. е. квадрата, не вызывают затруднений.

Если уже построен какой-нибудь правильный n-угольник, то можно построить правильный $2n$-угольник. В самом деле, пусть $A_1A_2...A_n$ — построенный правильный n-угольник. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2, обозначим буквой O точку их пересечения, а затем проведём окружность с центром O радиуса OA_1 (рис. 53, *а*). Далее проведём биссектрисы углов A_1OA_2, A_2OA_3, ... до пересечения с описанной окружностью в точках B_1, B_2, ..., B_n (рис. 53, *б*; на нём $n = 6$). Многоугольник $A_1B_1A_2B_2...B_n$ — искомый $2n$-угольник (докажите это).

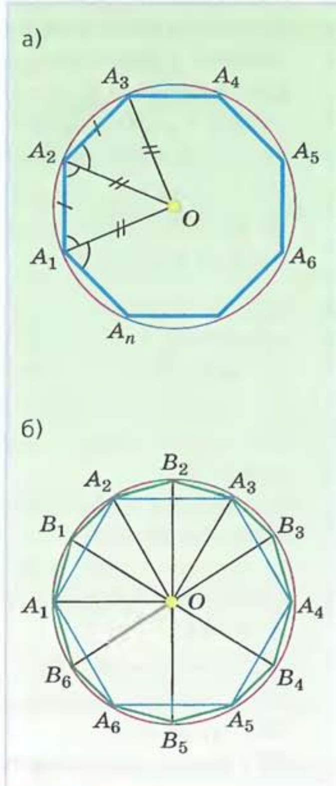


Рис. 53

Применяя этот приём, можно построить целый ряд правильных многоугольников. Так, построив квадрат, можно построить правильный восьмиугольник, затем правильный шестнадцатиугольник и вообще правильный 2^k-угольник, где k — любое целое число больше двух.

Оказывается, однако, что не любой правильный многоугольник допускает построение с помощью циркуля и линейки. Доказано, например, что правильный семиугольник нельзя построить с помощью циркуля и линейки, но можно построить правильный семнадцатиугольник.

Вопросы и задачи

43. а) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $\angle ACB = \angle ADE$, $\angle ACD = \angle ADC$ и $\angle BAC = \angle DAE$. Докажите, что периметры четырёхугольников $ABCD$ и $ACDE$ равны.

б) Найдите сумму углов выпуклого семиугольника.

в) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна 720°?

г) При каждой вершине выпуклого n-угольника взяты оба внешних угла. Найдите сумму этих углов.

д) Стороны AB и CD выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны и $\angle BAD = \angle CDA$. Сравните периметры пятиугольников $ABDEF$ и $ACDEF$.

е) Сколько диагоналей имеет n-угольник?

ж) Можно ли выпуклый стоугольник разрезать на 97 треугольников?

з) Докажите, что разность сумм углов выпуклых n-угольника и $(n-1)$-угольника не зависит от n.

44. а) Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $\angle ACB = \angle AEF$, $\angle ACE = \angle AEC$ и $\angle BAC = \angle EAF$. Докажите, что периметры пятиугольников $ABCDE$ и $ACDEF$ равны.

б) Найдите угол выпуклого двенадцатиугольника, все углы которого равны.

в) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен 140°?

г) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый внешний угол которого равен 1°?

д) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, его диагональ AC параллельна стороне ED. Сравните периметры четырёхугольников $EABC$ и $DCBA$.

е) Может ли многоугольник иметь 24 диагонали?

ж) На какое наименьшее число треугольников можно разрезать выпуклый 1000-угольник?

з) Сумма углов выпуклого n-угольника в k раз больше суммы углов выпуклого $(n-1)$-угольника, где k — натуральное число. Найдите k.

45. а) Диагонали четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $BC = CD$, пересекаются в точке O. Сравните периметры пятиугольников $ABCOD$ и $ABOCD$.

б) Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 3, 4.

в) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD. Найдите углы A, D и ACB, если $\angle B = 110°$ и $\angle C = 130°$.

г) Найдите сумму двух противоположных сторон описанного четырёхугольника, если его периметр равен 60 см.

46. а) Диагональ AC невыпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = AD > BC = CD$, разделяет его на два треугольника. Прямые AC и BD пересекаются в точке O. Сравните периметры пятиугольников $BCODA$ и $DCOBA$.

б) Докажите, что хотя бы один из углов выпуклого четырёхугольника, отличного от прямоугольника, — тупой.

в) Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что около четырёхугольника A_1HB_1C можно описать окружность.

г) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса r. Найдите сумму $AD + BC$, если $\angle C = \angle D = 90°$ и $\angle A = 30°$.

47. а) Докажите, что угол правильного n-угольника равен $\frac{n-2}{n}180°$.

б) Найдите сторону правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, если $A_1A_4 = 20$ см.

в) Биссектрисы двух углов выпуклого многоугольника параллельны. Докажите, что этот многоугольник не является правильным.

г) С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите правильный шестиугольник.

д) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если дуга описанной около него окружности, которую стягивает его сторона, равна 5°?

е) Диагонали A_1A_6 и A_2A_9 правильного двенадцатиугольника $A_1A_2...A_{12}$ пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники A_1A_2M и A_6A_9M равносторонние.

ж) Докажите, что периметр правильного $2n$-угольника, описанного около окружности, меньше периметра правильного n-угольника, описанного около той же окружности.

з) С помощью циркуля и линейки около данной окружности опишите правильный четырёхугольник.

48. а) Найдите углы правильного n-угольника, если $n = 5$; $n = 10$.

б) Восьмиугольник $A_1A_2...A_8$ — правильный. Докажите, что четырёхугольник $A_3A_4A_7A_8$ — прямоугольник.

в) Серединные перпендикуляры к двум сторонам многоугольника параллельны. Докажите, что этот многоугольник не является правильным.

г) С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите квадрат.

д) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, один из внешних углов которого равен 3°?

е) Докажите, что диагональ A_1A_6 правильного двенадцатиугольника $A_1A_2...A_{12}$ равна диаметру вписанной в него окружности.

ж) Докажите, что периметр правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность, больше периметра правильного n-угольника, вписанного в ту же окружность.

з) С помощью циркуля и линейки около данной окружности опишите правильный треугольник.

§ 14 Параллелограмм и трапеция

53 Свойства параллелограмма

Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Докажем, что

параллелограмм — выпуклый четырёхугольник.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 54) и докажем, например, что он лежит по одну сторону от прямой AB.

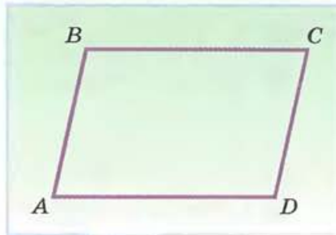


Рис. 54

Так как $AB \parallel CD$, то отрезок CD не имеет общих точек с прямой AB. Иными словами, отрезок CD лежит по одну сторону от прямой AB. Следовательно, отрезки BC и AD лежат по ту же сторону от прямой AB. Таким образом, параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB. Аналогично доказывается, что он лежит по одну сторону от каждой из прямых BC, CD и DA. Это и означает, что параллелограмм — выпуклый четырёхугольник.

Рассмотрим свойства параллелограмма.

ТЕОРЕМА

В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 55). Поскольку параллелограмм $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, то диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по второму признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, накрест лежащие углы 1 и 2, а также 3 и 4 равны).

Следовательно, $AB = CD$, $AD = BC$, $\angle B = \angle D$ и $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. Теорема доказана.

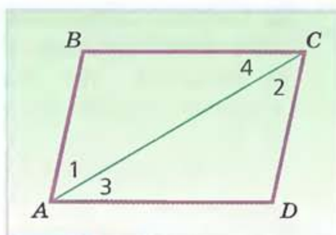


Рис. 55

ТЕОРЕМА

Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

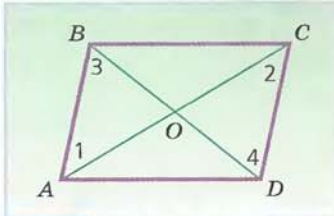


Рис. 56

Доказательство. Поскольку параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, то его диагонали пересекаются. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 56). Докажем, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

Треугольники AOB и COD равны по второму признаку равенства треугольников: $AB = CD$ (противоположные стороны параллелограмма равны), $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD, равны). Следовательно, $AO = OC$ и $BO = OD$. Теорема доказана.

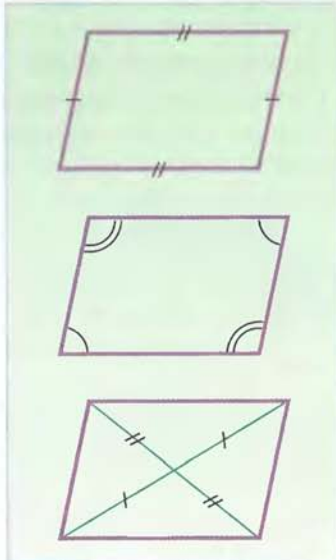


Рис. 57

Рисунок 57 иллюстрирует рассмотренные свойства параллелограмма.

54 Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

ТЕОРЕМА

Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Параллелограмм от греческих παράλληλος [параллелос] — рядом идущий и γραμμο [граммо] — линия.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, и докажем, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

Проведём ту из диагоналей четырёхугольника, которая разделяет его на два треугольника (диагональ AC на рисунке 58). Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, накрест лежащие углы 1 и 2 равны), поэтому $\angle 3 = \angle 4$.

Поскольку углы 3 и 4 — накрест лежащие, образованные при пересечении прямых AD и BC секущей AC, то $AD \parallel BC$. Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, т. е. этот четырёхугольник — параллелограмм. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА

Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $AD = BC$, и докажем, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

Проведём ту из диагоналей четырёхугольника, которая разделяет его на два треугольника (диагональ AC на рисунке 59). Треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников (AC — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = DA$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

Поскольку углы 1 и 2 — накрест лежащие, образованные при пересечении прямых AB и CD секущей AC, то $AB \parallel CD$. Таким образом, $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. Следовательно, по предыдущей теореме четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Теорема доказана.

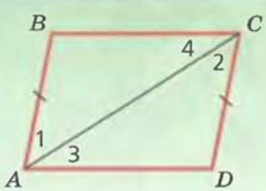


Рис. 58

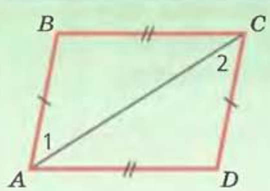


Рис. 59

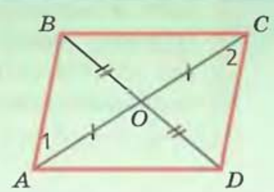


Рис. 60

ТЕОРЕМА

Если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O и делятся ею пополам (рис. 60). Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, вертикальные углы AOB и COD равны), поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

Поскольку углы 1 и 2 — накрест лежащие, образованные при пересечении прямых AB и CD секущей AC, то $AB \parallel CD$. Аналогично доказывается, что $AD \parallel BC$. Итак, противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, т. е. этот четырёхугольник — параллелограмм. Теорема доказана.

55 Признаки прямоугольника

ТЕОРЕМА

Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.

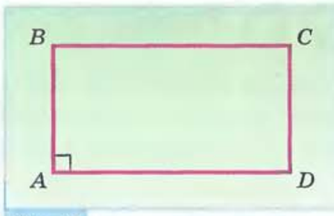


Рис. 61

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ угол A прямой (рис. 61). Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник, т. е. все его углы прямые.

Поскольку противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle C = \angle A = 90°$, $\angle B = \angle D = \frac{1}{2}(360° - \angle A - \angle C) = 90°$. Таким образом, все углы четырёхугольника $ABCD$ — прямые. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА

Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны. Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

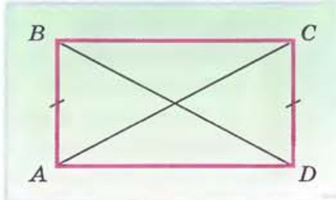


Рис. 62

Поскольку противоположные стороны AB и CD параллелограмма равны (рис. 62), то треугольники ABD и DCA равны по трём сторонам. Следовательно, углы A и D параллелограмма равны. Но $\angle A + \angle D = 180°$, поэтому $2\angle A = 180°$, т. е. $\angle A = 90°$. По предыдущей теореме параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник. Теорема доказана.

Справедливо и обратное утверждение (свойство прямоугольника):

- **диагонали прямоугольника равны.**

В самом деле, противоположные стороны AB и CD прямоугольника $ABCD$ равны (см. рис. 62). Следовательно, прямоугольные треугольники ABD и DCA равны по двум катетам, поэтому их гипотенузы, т. е. диагонали прямоугольника, равны.

56 Ромб

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны. Ромб является параллелограммом и поэтому обладает всеми свойствами параллелограмма. Но у него есть и особое свойство:

- **диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.**

Обратимся к рисунку 63, на котором изображён ромб $ABCD$. Докажем, что $AC \perp BD$ и каждая диагональ делит углы ромба пополам.

По условию $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Поскольку ромб — параллелограмм, то его диагонали пересекаются в некоторой точке O и делятся ею пополам. Отсюда следует, что медиана AO равнобедренного треугольника BAD является также его высотой и биссектрисой. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. Справедливость равенств $\angle BCA = \angle DCA$, $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle ADB = \angle CDB$ доказывается аналогично.

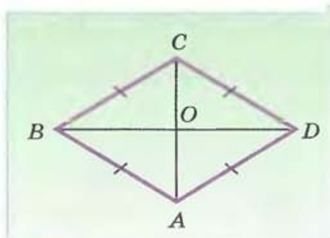


Рис. 63

Рассмотрим два признака ромба.

ТЕОРЕМА

Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ взаимно перпендикулярны (рис. 64). Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — ромб.

Так как диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то $AO = OC$ и $BO = OD$. Следовательно, прямоугольные треугольники OBA, OBC, ODC и ODA равны по двум катетам, поэтому $AB = BC = CD = DA$, т. е. параллелограмм $ABCD$ — ромб. Теорема доказана.

Ромб — от греческого ρομβος [ромбос] — бубен. Такое название связано с тем, что в древности бубны имели форму квадрата или ромба.

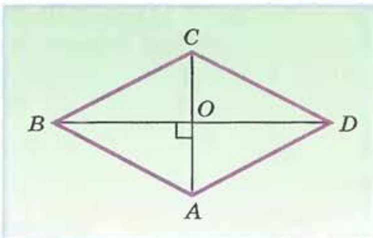


Рис. 64

ТЕОРЕМА

Если диагональ параллелограмма делит его угол пополам, то этот параллелограмм — ромб.

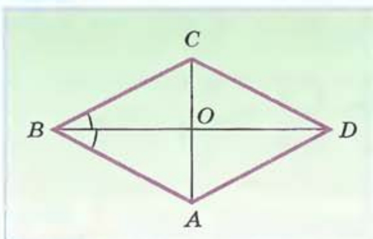


Рис. 65

Доказательство. Пусть диагональ BD параллелограмма $ABCD$ делит угол B пополам (рис. 65): $\angle ABD = \angle CBD$. Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — ромб.

Углы ABD и CDB равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей BD. Следовательно, $\angle CDB = \angle CBD$, поэтому треугольник CBD равнобедренный: $BC = CD$. Кроме того, $AB = CD$ и $BC = DA$ (как противоположные стороны параллелограмма). Таким образом, $AB = BC = CD = DA$, т. е. параллелограмм $ABCD$ — ромб. Теорема доказана.

Рис. 66

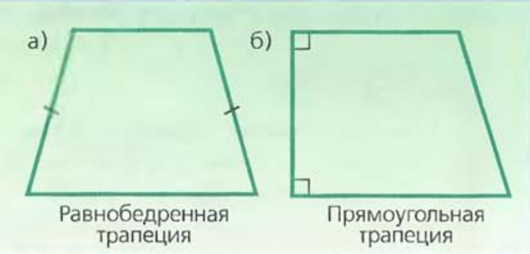


Рис. 67

57 Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её основаниями, а две другие стороны — боковыми сторонами трапеции (рис. 66). Можно доказать (задача 110), что трапеция является выпуклым четырёхугольником.

Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны (рис. 67, *а*). Трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной (рис. 67, *б*).

Трапеция — от греческого τράπέζιον [трапецион] — столик.

58 Симметрия

Точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O, если точка O — середина отрезка AA_1 (рис. 68, *а*). Точка O считается симметричной самой себе.

На рисунке 68, *б* точки A и A_1, B и B_1 симметричны относительно точки O, а точки C и D не симметричны относительно этой точки, так как $OC \neq OD$.

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка (относительно точки O) также принадлежит этой фигуре.

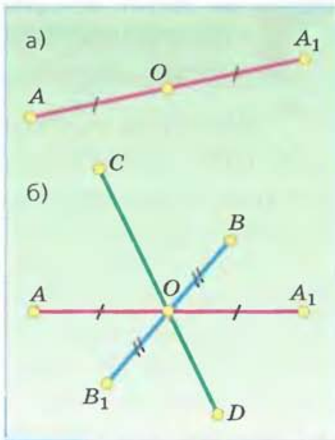
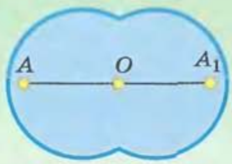


Рис. 68



Точка O — центр симметрии фигуры

Рис. 69

Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 70

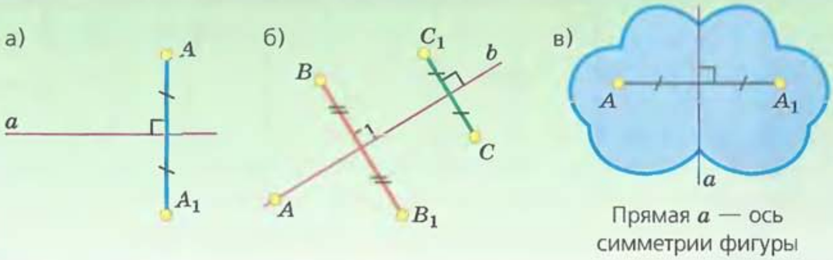
При этом точка O называется <u>центром симметрии фигуры</u>. Говорят также, что <u>фигура обладает центральной симметрией</u>.

На рисунке 69 изображена фигура, обладающая центральной симметрией. Если повернуть её на 180° вокруг центра симметрии — точки O, то она совместится сама с собой, в частности, произвольная точка A фигуры перейдёт в симметричную ей точку A_1, а точка A_1 — в точку A.

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются отрезок (см. рис. 68, *а*), окружность и параллелограмм (рис. 70), любой правильный $2n$-угольник — центр такого многоугольника является центром его симметрии. Прямая также обладает центральной симметрией — любая точка прямой является её центром симметрии. Примерами фигур, не имеющих центра симметрии, являются луч и треугольник.

Точки A и A_1 называются <u>симметричными относительно прямой</u> a, если прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 (рис. 71, *а*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

На рисунке 71, *б* точки B и B_1, C и C_1 симметричны относительно прямой b, а точка A симметрична самой себе относительно этой прямой.



Прямая a — ось симметрии фигуры

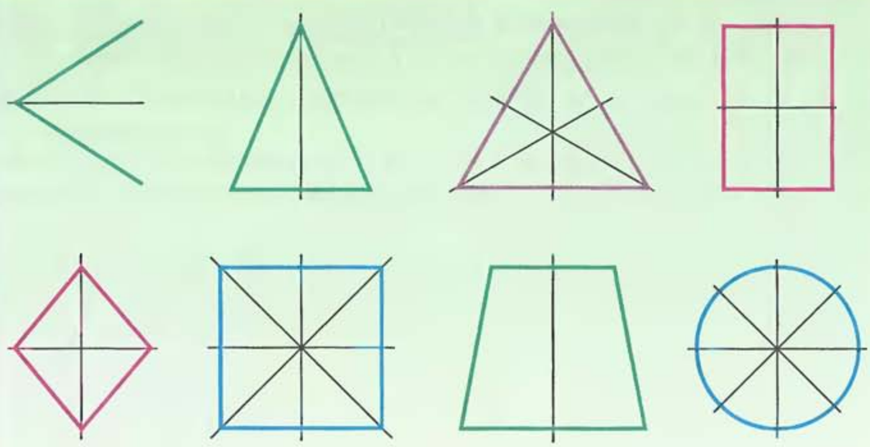
Рис. 71

Фигура называется симметричной относительно прямой a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка (относительно прямой a) также принадлежит этой фигуре.

При этом прямая a называется осью симметрии фигуры. Говорят также, что фигура обладает осевой симметрией.

На рисунке 71, *в* изображена фигура, обладающая осевой симметрией. Если перегнуть эту фигуру по оси симметрии (прямой a), то левая часть фигуры (по отношению к прямой a) совместится с правой частью фигуры. При этом произвольная точка A фигуры наложится на симметричную ей точку A_1.

Рассмотрим примеры фигур, обладающих осевой симметрией (рис. 72). Неразвёрнутый угол имеет одну ось симметрии. Равнобедренный, но не равносторонний треугольник имеет одну ось симметрии, а равносторонний треугольник — три оси симметрии. Прямоугольник и ромб, не являющиеся квадратами, имеют по две оси симметрии, а квадрат — четыре оси симметрии. Равнобедренная трапеция имеет одну ось симметрии, а окружность и также прямая — бесконечно много осей симметрии. У любого правильного n-угольника n осей симметрии. Примерами фигур, не имеющих осей симметрии, являются параллелограмм, отличный от прямоугольника и от ромба, неравнобедренный треугольник, неравнобедренная трапеция.



Фигуры, обладающие осевой симметрией

Рис. 72

Симметрия — от греческого συμμετρια [симметриа] — соразмерность, правильное отношение.

С симметрией мы часто встречаемся в архитектуре и живописи, в технике и быту. Симметрией обладают многие предметы, встречающиеся в природе. О различных видах симметрии, наряду с центральной и осевой, можно прочитать в книге [4].

Вопросы и задачи

49. а) Диагонали параллелограмма $ABCD$, равные 5 см и 11 см, пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника BCO, если $AD = 7$ см.

б) Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше высоты CH треугольника ACD. Найдите углы этого параллелограмма.

в) Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма с неравными смежными сторонами параллельны.

г) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке E. Найдите EC, если $AB = 5$ см и $AD = 7$ см.

д) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что $AP = CQ$. Докажите, что прямая AC делит отрезок PQ пополам.
е) На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что $AP = CQ$. Докажите, что $BP = DQ$.
ж) Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ перпендикулярно к BD, пересекает стороны AD и BC в точках P и Q. Докажите, что $BP = BQ$.
з) Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.
и) Даны три вершины параллелограмма. Постройте его четвёртую вершину. Сколько решений имеет эта задача?

50. а) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, периметр треугольника CDO равен 18 см и $AB = 6$ см. Найдите $AC + BD$.
б) Найдите угол C параллелограмма $ABCD$, если $\angle ADB = 90°$ и $AB = 2AD$.
в) Докажите, что биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, взаимно перпендикулярны.
г) Биссектриса одного из углов параллелограмма делит его сторону в отношении $2:1$. Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если меньшая сторона равна 6 см.
д) Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AD и BC в точках P и Q. Докажите, что $AP = CQ$.
е) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что $\angle ADP = \angle CBQ$. Докажите, что $BQ = DP$.
ж) Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AD и BC в точках P и Q так, что $BP = BQ$. Докажите, что $PQ \perp BD$.
з) Постройте параллелограмм по двум смежным сторонам и диагонали.
и) Постройте параллелограмм $ABCD$ по стороне AB и острому углу A так, чтобы расстояние от точки A до прямой CD было равно длине данного отрезка.

51. а) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle D = 110°$, $\angle CAB = 30°$, $\angle CAD = 40°$ и $AB = CD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.
б) Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O, точки M и N — середины отрезков OC и OD. Докажите, что $\angle MAN = \angle MBN$.
в) На сторонах AB, BC и CA равнобедренного треугольника ABC с основанием BC отмечены точки L, M и N так, что середины отрезков MN и CL совпадают. Докажите, что $\angle B = \angle MLN$.
г) Точки A, B и C не лежат на одной прямой, середины отрезков AB и CD совпадают. Какая из ломаных — $ABCDA$ или $ACBDA$ — является параллелограммом?

д) На сторонах AB, BC и CA равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечены точки L, M и N так, что $AL = LN = BM$. Докажите, что $MN = MC$.
е) Точки M и N — середины сторон AC и BC треугольника ABC, точка D лежит на прямой MN и $AD \parallel BC$. Докажите, что $AB \parallel DN$.
ж) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P, а вне параллелограмма — точка Q так, что отрезки BP и AQ имеют общую середину. Докажите, что отрезки CP и DQ имеют общую середину.

52. а) Все стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны и $BF = CE$. Докажите, что $BC \parallel EF$.
б) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точки M и N — середины отрезков OA и OC. Докажите, что углы MBN и MDN равны.
в) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки L, M и N так, что середины отрезков MN и CL совпадают и $\angle B = \angle MLN$. Докажите, что $AB = AC$.
г) Точки A, B, C и D расположены так, что $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$. Какая из ломаных — $ABCDA$ или $ABDCA$ — является параллелограммом?
д) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки L, M и N так, что $AN = NL = BM$, $BL = MN$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
е) На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и N, точка M — середина отрезка DN, $AD = BN$ и $AB = 2MN$. Докажите, что $BN = NC$.
ж) На стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P, а вне четырёхугольника — точка Q. При этом отрезки BP и AQ, а также отрезки CP и DQ имеют общие середины. Докажите, что отрезки AC и BD имеют общую середину.

53. а) Докажите, что если точка пересечения диагоналей параллелограмма равноудалена от двух его соседних вершин, то этот параллелограмм — прямоугольник.
б) Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.
в) Окружность, диаметром которой является диагональ AC параллелограмма $ABCD$, пересекает прямую BD в точках P и Q. Докажите, что четырёхугольник $APCQ$ — прямоугольник.
г) Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причём $AO = OB$, $CO = OD$ и $\angle ACB = \angle CAD$. Докажите, что этот четырёхугольник — прямоугольник.

54. а) Докажите, что если в параллелограмме $ABCD$ углы ABD и BAC равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.
б) Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность.

в) На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что $\angle BPD = \angle BQD = 90°$. Докажите, что четырёхугольник $BPDQ$ — прямоугольник.

г) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ADB = \angle CAD$, $\angle ACB = \angle CBD$ и $AD = BC$. Докажите, что этот четырёхугольник — прямоугольник.

55. а) Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника ABO, если $AB = BD$.

б) Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle B = 120°$ и $BD = 5$ см.

в) Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

г) Постройте ромб по двум диагоналям.

56. а) Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что середины отрезков OA, OB, OC и OD являются вершинами ромба.

б) Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются середины сторон прямоугольника, — ромб.

в) Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

г) Постройте ромб по стороне и углу.

57. а) Прямые, содержащие боковые стороны трапеции $ABCD$ с основанием AD, пересекаются в точке M. Найдите угол M, если $\angle A = 65°$ и $\angle C = 115°$.

б) Острый угол прямоугольной трапеции равен 45°, меньшее основание и меньшая боковая сторона равны 5 см. Найдите большее основание.

в) Докажите, что в равнобедренной трапеции: углы при каждом основании равны; диагонали равны.

г) Постройте равнобедренную трапецию по основанию, углу при этом основании и боковой стороне.

д) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна меньшему основанию, угол между боковой стороной и диагональю равен 120°. Найдите углы трапеции.

е) Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 10 см, угол между меньшим основанием и меньшей диагональю равен острому углу трапеции. Найдите большее основание.

ж) Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

з) Постройте прямоугольную трапецию по меньшему основанию и боковым сторонам.

и) Докажите, что сумма боковых сторон трапеции больше разности её большего и меньшего оснований.

к) При пересечении биссектрис углов трапеции образовался выпуклый четырёхугольник. Докажите, что около него можно описать окружность.

л) Постройте равнобедренную трапецию по боковой стороне, большему основанию и отрезку, длина которого равна расстоянию между прямыми, содержащими основания.

м) Постройте равнобедренную трапецию по двум углам, на которые диагональ делит её тупой угол, и отрезку, длина которого равна расстоянию между прямыми, содержащими основания трапеции.

58. а) Прямые, содержащие боковые стороны трапеции $ABCD$ с основанием AD, пересекаются в точке M. Найдите угол BCD, если $\angle A = 35°$ и $\angle M = 85°$.

б) Острый угол прямоугольной трапеции равен 60°, большее основание и бо́льшая боковая сторона равны 30 см. Найдите меньшее основание.

в) Докажите, что трапеция является равнобедренной, если: углы при основании равны; диагонали трапеции равны.

г) Постройте равнобедренную трапецию по основанию, боковой стороне и диагонали.

д) Большее основание равнобедренной трапеции в два раза больше меньшего, а расстояние от середины большего основания до вершины тупого угла равно длине меньшего основания. Найдите углы трапеции.

е) Диагональ прямоугольной трапеции перпендикулярна к боковой стороне, острый угол трапеции равен 45°, а ее большее основание равно 14 см. Найдите меньшее основание.

ж) Докажите, что около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

з) Постройте прямоугольную трапецию по меньшей диагонали, большему основанию и большей боковой стороне.

и) Докажите, что сумма диагоналей трапеции больше суммы её оснований.

к) Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, точка M — середина боковой стороны AB. Докажите, что $MO \parallel AD$.

л) Постройте равнобедренную трапецию по диагонали, большему основанию и перпендикуляру, проведённому из вершины тупого угла к прямой, содержащей большее основание трапеции.

м) Постройте трапецию по четырём сторонам.

59. а) Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно середины отрезка AB.

б) Имеет ли центр симметрии: угол; пара пересекающихся прямых?

в) Какие из следующих букв имеют центр симметрии: А, О, М, X, К?

г) Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

60. а) Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB.

б) Сколько осей симметрии имеет: отрезок; прямая; луч?

в) Какие из следующих букв имеют ось симметрии: А, X, Г, Е, О, F?

г) Докажите, что прямая, содержащая высоту равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии этого треугольника.

§ 15 Теорема Фалеса

59 Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 73, *а*). Докажем теорему о средней линии треугольника.

ТЕОРЕМА

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство. Пусть M и N — середины сторон BA и BC треугольника ABC (см. рис. 73, *а*). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

На продолжении отрезка MN за точку N отложим отрезок NL, равный MN (рис. 73, *б*). Диагонали четырёхугольника $MBLC$ пересекаются в точке N и делятся этой точкой пополам. Следовательно, этот четырёхугольник — параллелограмм, поэтому отрезки MB и CL равны и параллельны. Из этого следует, что отрезки AM и CL также равны и параллельны, т. е. четырёхугольник $AMLC$ — параллелограмм.

Таким образом, $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

Прямая, проходящая через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам.

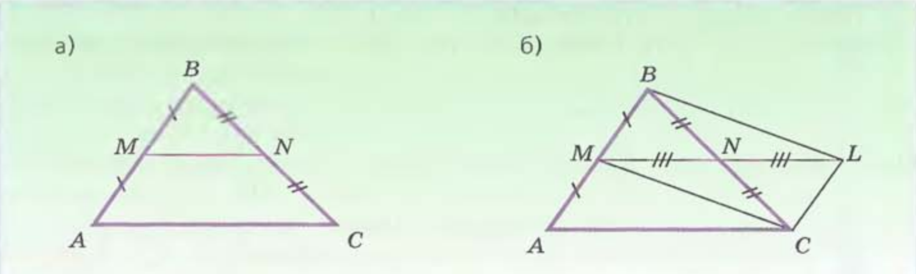


Рис. 73

Пусть точка M — середина стороны AB треугольника ABC (см. рис. 73, *а*). Через точку M можно провести только одну прямую, параллельную прямой AC. Этой прямой является прямая MN, где N — середина стороны BC, так как согласно доказанной теореме $MN \parallel AC$. Прямая MN делит сторону BC пополам, что и требовалось доказать.

60 Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон (рис. 74, *а*). Докажем теорему о средней линии трапеции.

ТЕОРЕМА

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (см. рис. 74, *а*). Докажем, что

$$MN \parallel AD \text{ и } MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Проведём через точку M прямую, параллельную основаниям трапеции. Эта прямая проходит через середину M стороны AB треугольника ABD и параллельна его стороне AD, поэтому (согласно следствию из теоремы о средней линии треугольника) она пересекает сторону BD в её середине O (рис. 74, *б*).

Прямая MO проходит через середину O стороны BD треугольника BCD и параллельна его стороне BC, поэтому она пересекает

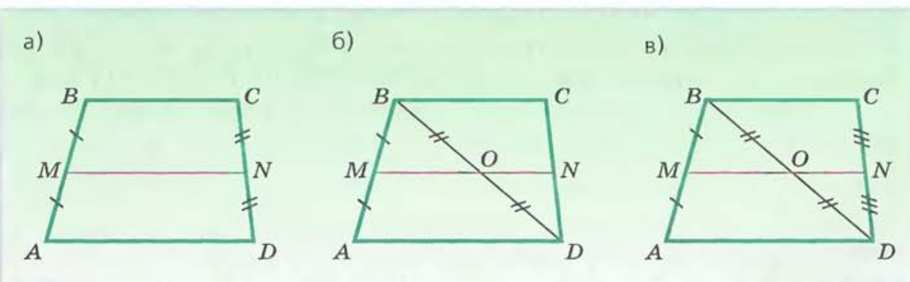


Рис. 74

сторону CD в её середине N (рис. 74, *в*). Таким образом, прямая MO совпадает с прямой MN. Следовательно, $MN \parallel AD$.

Поскольку отрезки MO и ON — средние линии треугольников ABD и BCD, то $MO = \frac{1}{2}AD$ и $ON = \frac{1}{2}BC$. Поэтому $MN = MO + ON = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

Прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции параллельно её основаниям, проходит через середину другой боковой стороны.

61 Теорема Фалеса

Воспользуемся утверждениями пунктов 59 и 60 для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА

Если на одной из сторон угла от его вершины отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то они отсекут на второй стороне равные между собой отрезки.

Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной A, на стороне которого отложены равные друг другу отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 75). Докажем, что отрезки AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу.

Прямая A_1B_1 проходит через середину A_1 стороны AA_2 треугольника AA_2B_2 параллельно его стороне A_2B_2, поэтому $AB_1 = B_1B_2$. Прямая A_2B_2 проходит через середину A_2 боковой стороны трапеции $A_1A_3B_3B_1$ параллельно её основаниям, поэтому $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогично доказывается, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д. Следовательно, все отрезки AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Теорема доказана.

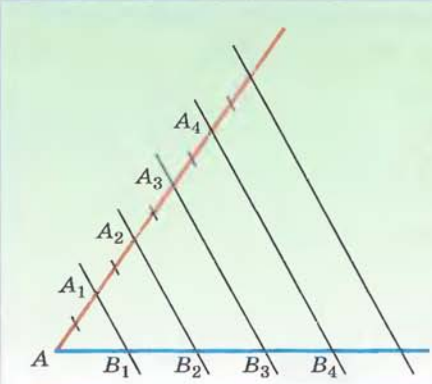


Рис. 75

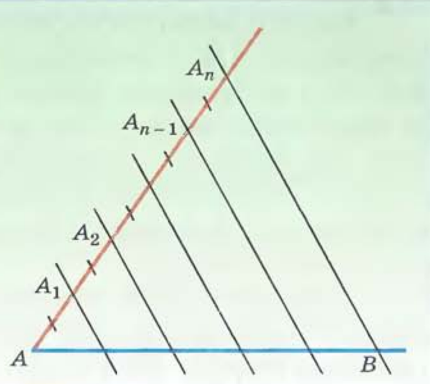


Рис. 76

По мнению некоторых учёных, эту теорему впервые открыл древнегреческий учёный Фалес Милетский (ок. 625—547 до н. э.). Это мнение впервые было высказано много столетий спустя после его смерти. В то время древнегреческие философы и математики, раздумывая о том, как Фалес во время путешествия в Египет смог измерить высоту пирамиды, предположили, что ему для этого могла понадобиться такая теорема. И хотя единого мнения на этот счёт нет, её называют теоремой Фалеса.

Теорема Фалеса позволяет с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на n равных отрезков. В самом деле, пусть AB — данный отрезок. На произвольном луче с началом A, не лежащем на прямой AB, отложим последовательно n каких-нибудь равных друг другу отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 76). Соединим точки A_n и B отрезком и проведём через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} прямые, параллельные A_nB. По теореме Фалеса эти прямые разделят отрезок AB на n равных отрезков.

62 Теорема о пересечении медиан треугольника

ТЕОРЕМА

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC с медианами AA_1, BB_1, CC_1 и обозначим буквой G точку пересечения медиан AA_1 и BB_1 (рис. 77). Докажем, что медиана CC_1 проходит через точку G и точка G делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

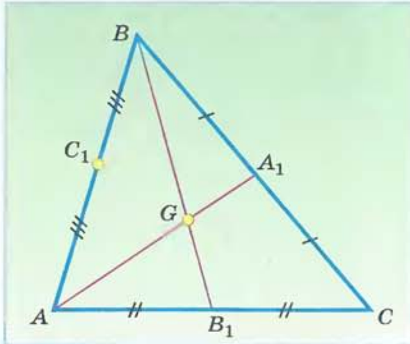


Рис. 77

Проведём через точки A_1 и C_1 прямые, параллельные BB_1 и пересекающие сторону AC в точках M и N (рис. 78). Поскольку $BA_1 = A_1C$ и $A_1M \parallel BB_1$, то по теореме Фалеса

$$B_1M = MC = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{4}AC.$$

По аналогичной причине

$$AN = NB_1 = \frac{1}{4}AC.$$

Из полученных равенств следует, что $AN = NB_1 = B_1M$, поэтому (по теореме Фалеса) параллельные прямые NC_1, B_1B и MA_1 делят отрезок AA_1 на три равных отрезка. Следовательно, $AG = 2GA_1$, т. е. точка G пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит медиану AA_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка G_1 пересечения медиан AA_1 и CC_1 делит медиану AA_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины. Так как каждая из точек G и G_1 делит медиану AA_1 в одном и том же отношении, то точки G и G_1 совпадают.

Таким образом, все три медианы пересекаются в точке G, причём

$$AG : GA_1 = 2 : 1.$$

Аналогично получаем

$$BG : GB_1 = 2 : 1 \text{ и } CG : GC_1 = 2 : 1.$$

Теорема доказана.

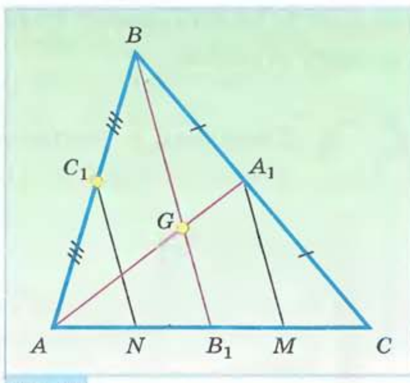


Рис. 78

63 Теорема о пересечении высот треугольника

ТЕОРЕМА

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC с высотами AA_1, BB_1 и CC_1 и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Проведём через точки A, B, C прямые, соответственно перпендикулярные к прямым AA_1, BB_1, CC_1 и, следовательно, соответственно параллельные прямым BC, CA, AB (рис. 79). Эти прямые, пересекаясь, образуют треугольник $A_2B_2C_2$.

Так как $C_2A \parallel BC$ и $C_2B \parallel AC$, то четырёхугольник BC_2AC — параллелограмм, поэтому $C_2A = BC$. По аналогичной причине $AB_2 = BC$. Из этих двух равенств следует, что $C_2A = AB_2$, т. е. точка A — середина отрезка C_2B_2. Аналогично можно доказать, что точки B и C — середины отрезков A_2C_2 и A_2B_2.

Таким образом, прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$, поэтому они пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

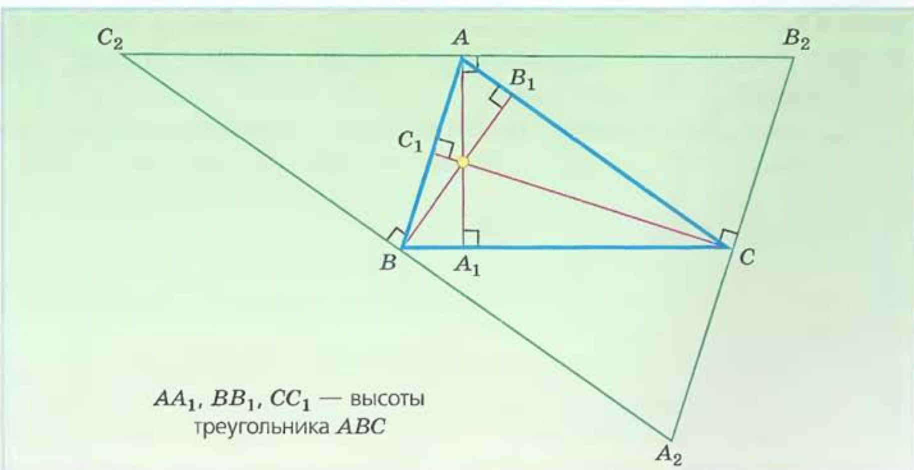


Рис. 79

Точку пересечения высот треугольника (или их продолжений) для краткости называют ортоцентром треугольника.

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам, точка пересечения медиан и ортоцентр. Эти четыре точки называются замечательными точками треугольника.

В равностороннем треугольнике все замечательные точки совпадают.

64* Свойства ортоцентра треугольника

Докажем сначала, что

- **точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника, и диаметрально противоположны его вершинам.**

Проведём доказательство этого утверждения для точки, симметричной ортоцентру треугольника ABC относительно середины стороны BC.

Рассмотрим сначала случай, когда $\angle B \neq 90°$ и $\angle C \neq 90°$. Пусть BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, H — его ортоцентр (рис. 80, *а*).

Проведём диаметр AD окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 80, *б*). Поскольку каждый из вписанных углов ABD и ACD опирается на полуокружность, то $BD \perp AB$ и $CD \perp AC$. Следовательно, $BB_1 \parallel CD$ и $CC_1 \parallel BD$.

Рассмотрим четырёхугольник $BDCH$. Его противоположные стороны попарно параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм, и его диагонали BC и DH точкой M пересечения делятся пополам: $BM = MC$, $DM = MH$ (рис. 80, *в*).

Таким образом, точка D описанной окружности, диаметрально противоположная точке A, симметрична ортоцентру H относительно середины M стороны BC.

В случае, когда $\angle B = 90°$ (рис. 80, *г*), ортоцентром треугольника ABC является точка B, а точка D, симметричная ортоцентру относительно середины M стороны BC, совпадает с точкой C и, следовательно, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и диаметрально противоположна точке A.

В случае, когда $\angle C = 90°$, доказательство проводится аналогично (рис. 80, д).

Итак, во всех случаях точка, симметричная ортоцентру H относительно середины стороны BC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и диаметрально противоположна вершине A.

Аналогично доказывается, что точка, симметричная ортоцентру H относительно середины стороны $CA(AB)$, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и диаметрально противоположна вершине $B(C)$.

Докажем теперь, что

- **точка пересечения медиан неравностороннего треугольника лежит на отрезке, соединяющем центр описанной около него окружности с ортоцентром, и делит этот отрезок в отношении 2 : 1, считая от ортоцентра.**

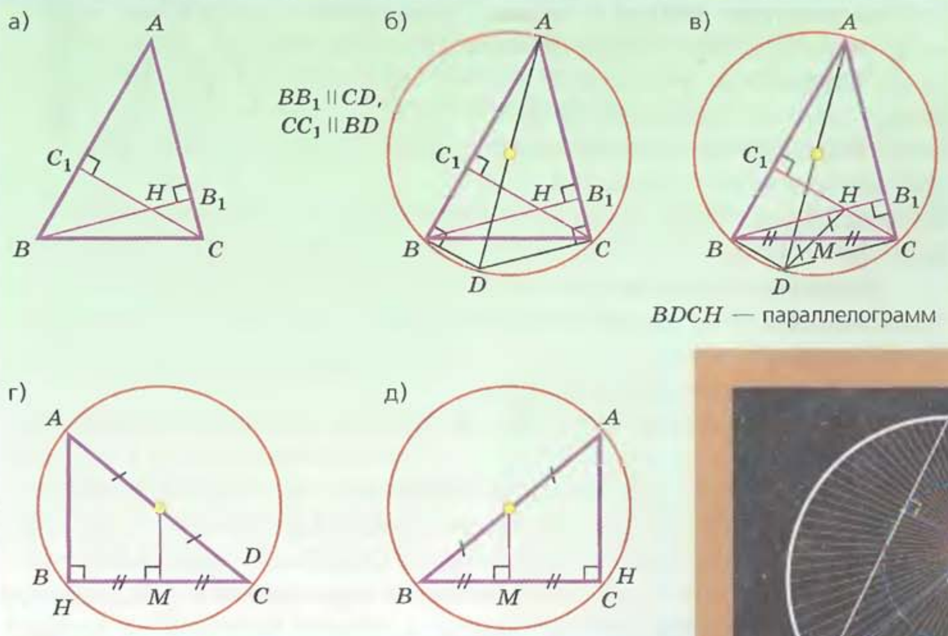


Рис. 80

Ортоцентр — от греческого ορθος [ортос] — прямой. Слово «ортоцентр» происходит от слова «ортогональность» (от ορθος и γωνια [гониа] — угол), которое является синонимом слова «перпендикулярность».

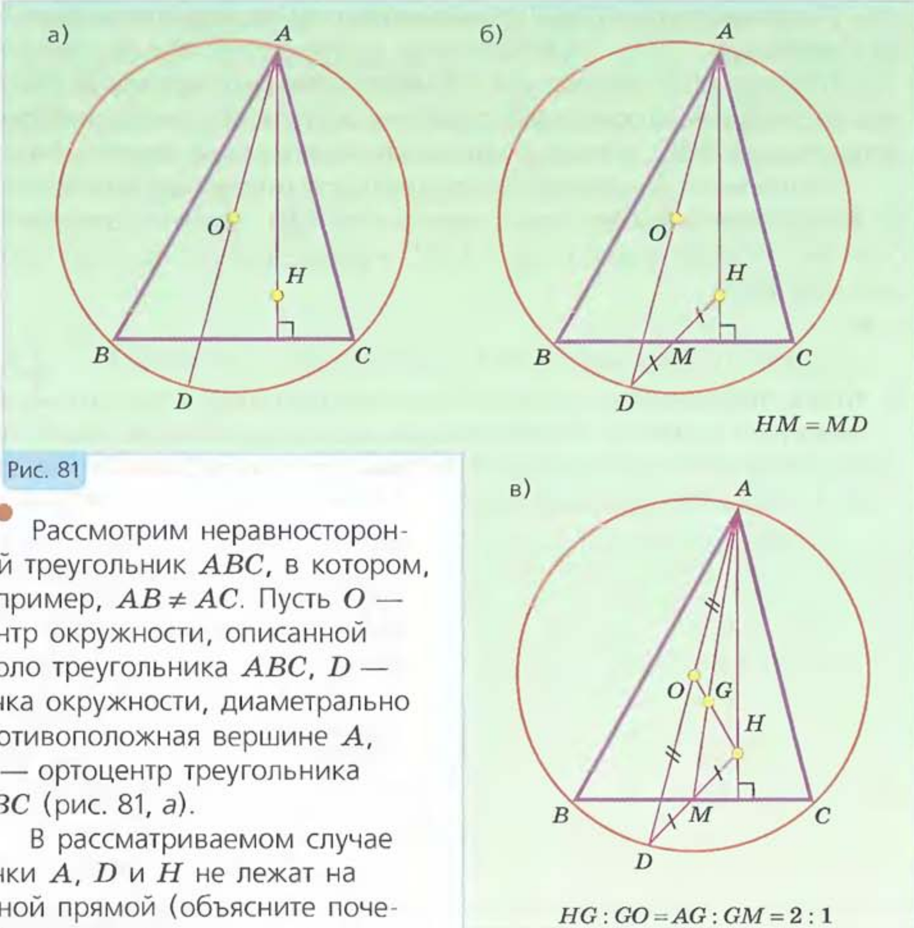


Рис. 81

Рассмотрим неравносторонний треугольник ABC, в котором, например, $AB \neq AC$. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, D — точка окружности, диаметрально противоположная вершине A, H — ортоцентр треугольника ABC (рис. 81, *а*).

В рассматриваемом случае точки A, D и H не лежат на одной прямой (объясните почему). Поскольку точки H и D симметричны относительно середины M стороны BC, то $HM = MD$ (рис. 81, *б*).

Отрезки HO и AM являются медианами треугольника ADH (рис. 81, *в*), поэтому каждый из них делится точкой G их пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины: $HG : GO = 2 : 1$, $AG : GM = 2 : 1$. Но отрезок AM, будучи медианой треугольника ABC, делится в отношении 2 : 1, считая от вершины A, точкой пересечения медиан треугольника ABC. Следовательно, точка G является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Таким образом, точка G лежит на отрезке HO и делит этот отрезок в отношении 2 : 1, считая от точки H.

Прямая, на которой лежат центр окружности, описанной около треугольника, точка пересечения его медиан и ортоцентр, называется прямой Эйлера этого треугольника — по имени выдающегося швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707—1783), многие годы жившего и работавшего в России.

65* Окружность Эйлера

Докажем одну из самых красивых теорем геометрии — теорему об окружности Эйлера.

ТЕОРЕМА

В неравностороннем треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности, центром которой является середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной окружности, а её радиус в два раза меньше радиуса описанной окружности.

Доказательство. Рассмотрим произвольный неравносторонний треугольник ABC и будем считать, что его вершины обозначены так, что $AB \neq AC$ и $AB \neq BC$. Пусть H — ортоцентр; O — центр описанной окружности, R — её радиус; A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB; A_2, B_2 и C_2 — основания высот, проведённых к этим сторонам; A_3, B_3 и C_3 — середины отрезков AH, BH и CH; E — середина отрезка OH (рис. 82). Докажем, что окружность с центром E радиуса $\frac{R}{2}$ проходит через точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3.

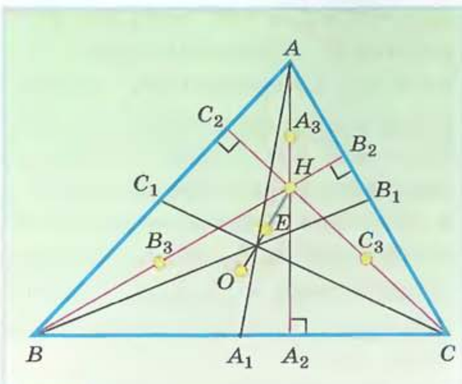


Рис. 82

Если $\angle A = 90°$, то точки H и A_3 совпадают с точкой A, а точка A_1 — с точкой O. Поэтому

$A_1A_3 = OA = R$ и точка E — середина отрезка A_1A_3 (рис. 83, *а*).

Если же $\angle A \neq 90°$, то проведём диаметр AD окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 83, *б*). Так как точка A_1 — середина отрезка DH (п. 64), то отрезок OA_1 — средняя линия треугольника ADH. Отрезок OA_3 также является средней линией этого треугольника. Следовательно,

$$A_1A_3 = \frac{1}{2}AD = R,$$

$$OA_3 = \frac{1}{2}DH = A_1H$$

и

$$OA_3 \parallel A_1H.$$

Так как противоположные стороны OA_3 и A_1H четырёхугольника OA_3HA_1 равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм, и середина E его диагонали OH является также серединой диагонали A_1A_3 (рис. 83, *в*). Таким образом, как и в предыдущем случае (когда $\angle A = 90°$), $A_1A_3 = R$ и точка E — середина отрезка A_1A_3. Следовательно, окружность с центром E радиуса $\frac{R}{2}$ проходит через точки A_1 и A_3, а поскольку точка E — середина гипотенузы A_1A_3 прямоугольного треугольника $A_1A_2A_3$, то указанная окружность проходит и через точку A_2.

По аналогичным причинам эта окружность проходит через

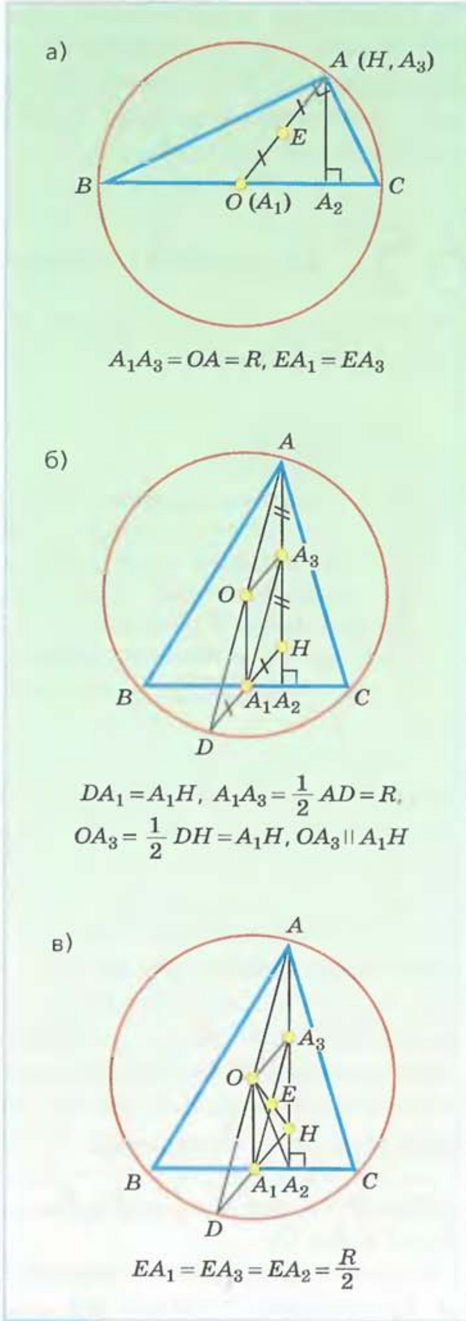


Рис. 83

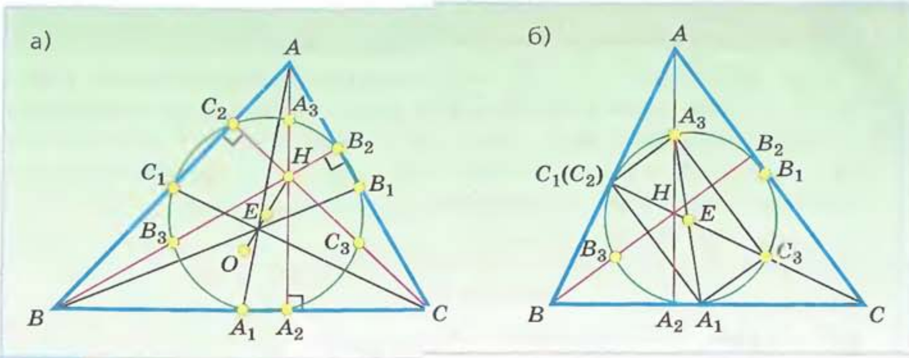


Рис. 84

точки B_1, B_2 и B_3, а в случае, когда $AC \neq BC$, и через точки C_1, C_2 и C_3 (рис. 84, *а*).

Если же $AC=BC$, то точки C_1 и C_2 совпадают, $\angle A=\angle B\neq 90°$. Отрезки A_1C_1 и A_3C_3 — средние линии треугольников BAC и HAC с общей стороной AC, перпендикулярной к прямой BH (рис. 84, *б*). Следовательно, стороны A_1C_1 и A_3C_3 четырёхугольника $A_1C_1A_3C_3$ равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм, причём $A_1C_1 \perp BH$.

Сторона A_1C_3 этого параллелограмма параллельна BH, поскольку она является средней линией треугольника BHC. Таким образом, $A_1C_1 \perp A_1C_3$, т. е. параллелограмм $A_1C_1A_3C_3$ — прямоугольник.

Его диагональ A_1A_3 является (согласно доказанному) диаметром рассматриваемой окружности, поэтому и диагональ C_1C_3 является её диаметром.

Итак, точки C_1, C_2 (совпадающая с C_1) и C_3 лежат на этой окружности. Теорема доказана.

Окружность, на которой лежат середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, называется окружностью Эйлера. В равностороннем треугольнике окружность Эйлера совпадает с вписанной окружностью.

Обратим внимание на то, что центр описанной около треугольника окружности, его ортоцентр, точка пересечения медиан и центр окружности Эйлера лежат на прямой Эйлера[1].

[1] Дополнительные сведения о геометрии треугольника можно найти в книге [10].

Вопросы и задачи

61. а) Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC, в котором $AB = 5$ см, $BC = 9$ см и $CA = 12$ см. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что $\triangle AB_1C_1 = \triangle BC_1A_1 = \triangle CA_1B_1 = \triangle A_1B_1C_1$.

в) Докажите, что перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ к прямой AB, является средней линией треугольника ABC.

г) Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам данного треугольника содержат высоты треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

д) Точки P, Q, R и T на рисунке 85 — середины сторон четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $PQRT$ — параллелограмм.

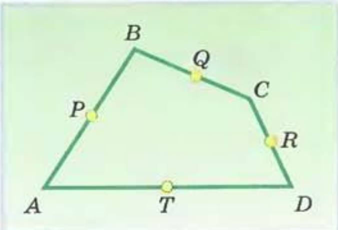


Рис. 85

е) Точки A, B и C — середины сторон неравнобедренного треугольника KLM, периметр треугольника ABC равен 4,5 см. Найдите стороны треугольника KLM, если они в сантиметрах выражаются целыми числами.

ж) Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые MD и NB параллельны и разделяют отрезок AC на три равные части.

з) Используя задачу 61 ж), разделите данный отрезок (с помощью циркуля и линейки) на три равных отрезка.

62. а) Отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, периметр треугольника AB_1C_1 равен 7 см. Найдите периметр треугольника ABC.

б) Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC так, что $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ и $AB_1 = B_1C$. Докажите, что отрезки A_1B_1 и B_1C_1 — средние линии треугольника ABC.

в) Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ до прямой AD равно 5 см. Найдите AB.

г) Докажите, что медианы данного треугольника содержат медианы треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

д) Точки P, Q, R и T на рисунке 86 — середины сторон четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $PQRT$ — параллелограмм.

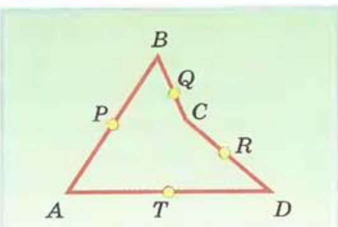


Рис. 86

е) Стороны треугольника ABC в сантиметрах выражаются целыми числами, точки K, L и M — середины его сторон, периметр треугольника KLM равен 5 см. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

ж) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит отрезок BO в отношении $2:1$, считая от точки B.

з) Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

63. а) Одно из оснований трапеции в три раза меньше другого, её средняя линия равна 20 см. Найдите основания трапеции.

б) Из вершины тупого угла равнобедренной трапеции $ABCD$ проведён перпендикуляр CE к прямой AD, содержащей большее основание. Докажите, что отрезок AE равен средней линии трапеции.

в) Дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, $\angle ACD = 90°$ и $AB = 2$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

г) Один из углов равнобедренной трапеции равен 120°, меньшее основание и боковая сторона равны соответственно 7 см и 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

д) Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, угол между большей диагональю и меньшей боковой стороной равен 60°. Докажите, что меньшая диагональ равна средней линии трапеции.

е) Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

ж) На сторонах AD и BC прямоугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки K, L и M, N так, что $AK = KL = LD$ и $BM = MN = NC$. Докажите, что прямые BK, ML и ND параллельны друг другу и разделяют отрезок AC на четыре равных отрезка.

64. а) Разность оснований трапеции равна 6 см, её средняя линия равна 15 см. Найдите основания трапеции.

б) Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние между прямыми, содержащими основания, равно длине средней линии трапеции.

в) Дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle A = 90°$, $\angle D = 30°$, $\angle ACD = 90°$ и $BC = 4$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

г) Один из углов равнобедренной трапеции равен 135°, большее основание и расстояние между прямыми, содержащими основания, равны соответственно 16 см и 6 см. Найдите среднюю линию трапеции.

д) Биссектриса прямого угла трапеции пересекает боковую сторону в её середине. Докажите, что меньшая боковая сторона равна сумме оснований.

е) Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, отсекаемого на средней линии трапеции её диагоналями.

ж) На одной из сторон угла от его вершины отложены последовательно четыре равных отрезка и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла. Стороны угла отсекают на этих параллельных прямых четыре отрезка, наименьший из которых равен a. Найдите три других отрезка.

65. а) Медианы AA_1 и CC_1 треугольника ABC, в котором угол B равен 120°, пересекаются в точке G. Найдите BG, если $AB = BC = 18$ см.

б) Точка H — ортоцентр треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle B = 80°$. Найдите угол ACH.

в) Постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам.

г) На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены их середины. Используя только линейку (и не используя циркуль)[1], разделите отрезок BC пополам.

66. а) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются точки пересечения медиан треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, — параллелограмм.

б) Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $\angle ABH = \angle ACH$.

в) Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведённые к боковым сторонам, пересекаются в точке H. Докажите, что прямая HC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

г) На рисунке 87 изображены окружность с диаметром AB и точка M, не лежащая на прямой AB. Перечертите этот рисунок в тетрадь и, используя только линейку (и не используя циркуль), проведите из точки M перпендикуляр к прямой AB.

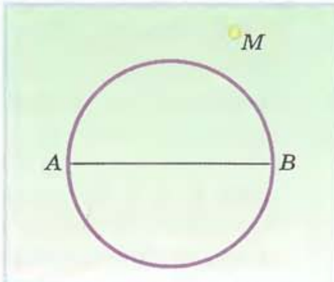


Рис. 87

Вопросы для повторения

1. Объясните, какая фигура называется ломаной.
2. Какая ломаная называется замкнутой? Какая ломаная называется простой?
3. Какая фигура называется многоугольником? Что такое стороны, вершины и диагонали многоугольника?
4. Какой многоугольник называется: вписанным в окружность; описанным около окружности?

[1] О построениях с ограниченными возможностями можно прочитать в книгах [5], [11], [12].

5. Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.
6. Выведите формулу суммы углов выпуклого n-угольника. Чему равна сумма его внешних углов?
7. Изобразите четырёхугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные вершины.
8. Докажите, что в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.
9. Сформулируйте утверждение, выражающее признак описанного четырёхугольника.
10. Докажите, что в любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.
11. Сформулируйте утверждение, выражающее признак вписанного четырёхугольника.
12. Какой многоугольник называется правильным?
13. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.
14. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.
15. Какая точка называется центром правильного многоугольника?
16. Дайте определение параллелограмма. Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.
17. Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
18. Докажите, что диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.
19. Сформулируйте и докажите теоремы о признаках параллелограмма.
20. Сформулируйте и докажите теоремы о признаках прямоугольника.
21. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
22. Какой четырёхугольник называется ромбом?
23. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
24. Сформулируйте и докажите теоремы о признаках ромба.
25. Какой четырёхугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?
26. Какая трапеция называется равнобедренной; прямоугольной?
27. Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

28. Какая фигура называется симметричной относительно данной точки? Как называется эта точка по отношению к фигуре?

29. Какие две точки называются симметричными относительно данной прямой?

30. Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой? Как называется эта прямая по отношению к фигуре?

31. Приведите примеры фигур, обладающих: а) центральной симметрией; б) осевой симметрией; в) центральной и осевой симметрией.

32. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

33. Докажите, что прямая, проходящая через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам.

34. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.

35. Докажите, что прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции параллельно её основаниям, проходит через середину другой боковой стороны.

36. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.

37. Объясните, как с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на n равных отрезков.

38. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении медиан треугольника.

39. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника. Какая точка называется ортоцентром треугольника?

40. Какие точки называются замечательными точками треугольника?

41*. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника, и диаметрально противоположны его вершинам.

42*. Докажите, что точка пересечения медиан неравностороннего треугольника лежит на отрезке, соединяющем центр описанной около него окружности с ортоцентром, и делит этот отрезок в отношении 2 : 1, считая от ортоцентра.

43*. Какая прямая называется прямой Эйлера?

44*. Какая окружность называется окружностью Эйлера? Сформулируйте и докажите теорему об окружности Эйлера.

Дополнительные задачи

§ 13

67. Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если три угла равны, а четвёртый вдвое больше каждого из них.

68. Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике найдутся два соседних угла, сумма которых: а) не меньше 180°; б) не больше 180°.

69. Докажите, что в любом выпуклом n-угольнике при $n \geqslant 5$: а) найдутся два соседних угла, сумма которых больше 180°; б) найдётся не более трёх нетупых углов.

70. Сумма углов выпуклого $2n$-угольника в k раз больше суммы углов выпуклого n-угольника, где k — натуральное число. Найдите k и n.

71. Существует ли многоугольник с 27 диагоналями?

72*. Докажите, что многоугольник, описанный около окружности, является выпуклым.

73. Внутри выпуклого четырёхугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин четырёхугольника имеет наименьшее значение.

74. Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы его диагоналей.

75. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника больше полупериметра, но меньше периметра этого четырёхугольника.

76. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Найдите сумму $\angle AOD + \angle BOC$.

77. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла AOB и пересекающиеся в точке C внутри этого угла. Докажите, что около четырёхугольника $ACBO$ можно описать окружность.

78*. Докажите, что если сумма противоположных углов выпуклого четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

79*. Докажите, что если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

80. Найдите угол правильного восемнадцатиугольника.

81. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, один из внешних углов которого равен: а) 72°; б) 60°?

82. Докажите, что диагонали AC и AD правильного пятиугольника $ABCDE$ делят угол BAE на три равные части.

83. Диагонали A_1A_4 и A_2A_7 правильного десятиугольника $A_1A_2...A_{10}$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники A_1A_2M и MA_4O равнобедренные.

84. Правильный десятиугольник $A_1A_2...A_{10}$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

85. С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите правильный треугольник; правильный восьмиугольник.

86. Около данной окружности опишите с помощью циркуля и линейки правильный шестиугольник; правильный восьмиугольник.

87*. Постройте правильный восьмиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

§ 14

88. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60°, отрезок BH — перпендикуляр, проведённый к прямой AD, причём $AH = 5$ см и $DH = 3$ см. Найдите периметр параллелограмма.

89. На отрезке AB отмечены точки H и K, а по разные стороны от прямой AB — точки C и D так, что $AK = BH$, $CH \perp AB$, $DK \perp AB$, $CH = DK$. Докажите, что четырёхугольник $ACBD$ — параллелограмм.

90. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки E, F, G и H так, что $AE = CG$ и $BF = DH$. Докажите, что четырёхугольник $EFGH$ — параллелограмм.

91. Докажите, что если сумма углов, прилежащих к каждой из сторон выпуклого четырёхугольника, не превосходит 180°, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

92. Докажите, что если противоположные углы выпуклого четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

93. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равные углы A и C не являются острыми, а $AB = CD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

94. Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки, равные 2 см и 5 см. Найдите периметр этого параллелограмма.

95. Биссектрисы двух углов, прилежащих к одной из сторон параллелограмма, делят противоположную сторону на отрезки, равные 3 см, 5 см и 3 см. Найдите периметр параллелограмма.

96. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 6 см, точка E — середина стороны AB. Найдите отрезки, на которые диагональ AC делится отрезком DE.

97. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что отрезок PQ проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма. Докажите, что: а) $BQ = PD$; б) если $BP = BQ$, то $PQ \perp BD$.

98. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и N, а на стороне AB — точки P и Q так, что $MN \parallel AB$, $PN \parallel AC$ и $QM \parallel BC$. Докажите, что $AP = BQ$.

99. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AD в точке P так, что $BO = OP$. Докажите, что $BP \perp AD$.

100. Прямая, параллельная диагонали BD параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AB и AD в точках P и Q, а прямые BC и CD — в точках M и N. Докажите, что $MP = NQ$.

101. Через вершины A и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проведены параллельные прямые, пересекающие стороны BC и AD в точках P и Q, а диагональ BD — в точках M и N. Докажите, что если $BM = DN$ и $MP = NQ$, то $AB = CD$.

102. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причём $BO = OD$ и $AO > OC$. Докажите, что $\angle A < \angle C$.

103. Четырёхугольник $ABCD$ — ромб. Докажите, что расстояние между прямыми AB и CD равно расстоянию между прямыми AD и BC.

104. Докажите, что если точка пересечения диагоналей параллелограмма равноудалена от его сторон, то этот параллелограмм — ромб.

105. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

106. Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат.

107. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм — квадрат.

108. На стороне AD ромба $ABCD$ с тупым углом B отмечена точка H так, что $BH \perp AD$. Найдите угол A, если $AC = 2BH$.

109. Центром окружности, вписанной в четырёхугольник, является точка пересечения его диагоналей. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

110*. Докажите, что трапеция — выпуклый четырёхугольник.

111. Докажите, что, прикладывая друг к другу одинаковые плитки, имеющие форму произвольного четырёхугольника, можно целиком покрыть любую часть плоскости.

112. Один из углов прямоугольной трапеции равен 150°, а одна из её боковых сторон равна 6 см. Найдите другую боковую сторону трапеции.

113. Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

114. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

115. Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

116. Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет и центр симметрии.

117*. Докажите, что: а) центр правильного $2n$-угольника является его центром симметрии; б) любой правильный n-угольник имеет n осей симметрии.

118. Постройте параллелограмм: а) по стороне, диагонали и углу, противолежащему этой диагонали; б) по стороне, диагонали и углу, который эта диагональ составляет со стороной, смежной данной.

119. Постройте ромб по диагонали и углу, который образует другая диагональ со стороной.

120. Постройте ромб по острому углу и отрезку, длина которого равна расстоянию между прямыми, содержащими противоположные стороны ромба.

121. Постройте прямоугольную трапецию по основаниям и боковой стороне, не перпендикулярной к основаниям.

122. Постройте равнобедренную трапецию по острому углу, диагонали и перпендикуляру, проведённому из вершины острого угла к прямой, содержащей меньшее основание трапеции.

§ 15

123. Докажите, что: а) средняя линия треугольника делит одну из его медиан пополам; б) медиана треугольника делит одну из его средних линий пополам.

124. Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются середины сторон равнобедренной трапеции, — ромб.

125. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно середин сторон BC и CA треугольника ABC. Докажите, что точки A_1 и B_1 симметричны относительно точки C.

126. Через вершину B и середину медианы AA_1 треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке D. Докажите, что $AD = \frac{1}{3}AC$.

127. Докажите, что если две замечательные точки треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний. Рассмотрите все возможные случаи.

128. Дан треугольник ABC. Постройте треугольник AA_1A_2, сторона AA_1 которого является медианой треугольника ABC, а две другие стороны соответственно равны двум другим медианам треугольника ABC и параллельны им. Сколько решений имеет задача?

129. Постройте треугольник по трём медианам.

130. Постройте прямоугольный треугольник по двум медианам, одна из которых проведена из вершины прямого угла.

Глава 6

Решение треугольников

В этой главе мы снова возвращаемся к треугольникам. Название главы таит в себе такой смысл: решить треугольник — это значит по каким-то его элементам найти другие элементы. Для этого используются различные формулы, связанные с тригонометрическими функциями угла — синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом. Что это такое — вы и узнаете в данной главе. Тригонометрические функции играют важную роль не только в геометрии, но и в других науках, архитектуре, технике.

§ 16 Косинус и синус острого угла

66 Пропорциональные отрезки

В 7 классе мы обсуждали вопрос о том, как измеряются отрезки в сантиметрах. За единицу измерения отрезков можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок.

Действительно, пусть AB — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче AB будем откладывать отрезки AA_1, A_1A_2, ..., равные PQ (рис. 88) до того момента, когда либо точка A_n совпадёт с точкой B, либо точка B окажется лежащей между точками A_n и A_{n+1}.

Если точка A_n совпадёт с точкой B, то говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB ровно n раз).

Если же точка B окажется лежащей между A_n и A_{n+1} (при $n=0$ в роли A_0 выступает точка A), то можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближённо выражается числом n. В этом случае для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB.

Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то её также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Таким способом можно измерить любой отрезок, т. е.

- **при выбранной единице измерения длина каждого отрезка выражается положительным числом, показывающим сколько раз эта единица и её части укладываются в отрезке.**

Число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, называется также отношением отрезка AB к отрезку CD.

Докажем, что

- **отношение отрезков равно отношению их длин при любой единице измерения.**

Рис. 88

Пусть a и b — числа, выражающие длины отрезков AB и CD при единице измерения EF, и пусть отношение отрезка AB к отрезку CD равно q. Нужно доказать, что $q = \frac{a}{b}$.

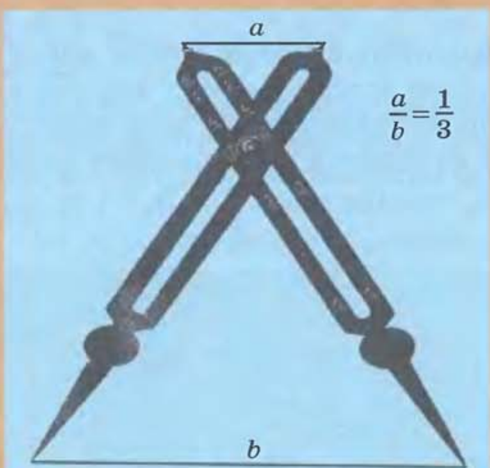
Поскольку в отрезке CD отрезок EF и его части укладываются b раз, а в отрезке AB отрезок CD и его части укладываются q раз, то в отрезке AB отрезок EF и его части укладываются $b \cdot q$ раз. Таким образом, $b \cdot q = a$, откуда $q = \frac{a}{b}$.

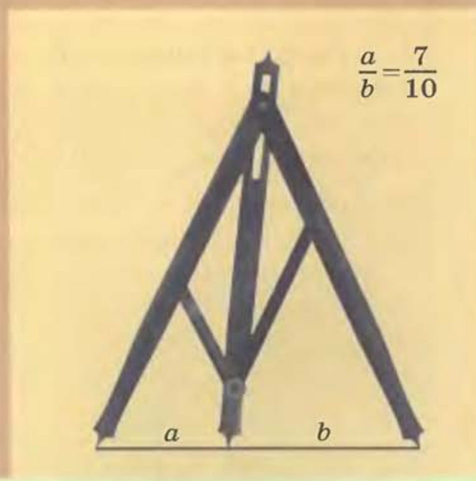
Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 3 см и 6 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 4 см и 8 см, поскольку $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{3}{4}$.

Говорят, что три отрезка AB, CD и EF пропорциональны трём отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}$.

Аналогично определяется пропорциональность для большего числа отрезков.





Пропорция — от латинского **proportio** (соразмерность). Для деления отрезка в каком-либо отношении на практике можно использовать делительный циркуль.

67 Косинус острого угла

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе. Косинус острого угла α прямоугольного треугольника обозначается символом $\cos\alpha$ (читается «косинус альфа»).

На рисунке 89 катет AC является прилежащим к углу A, поэтому косинус угла A равен отношению $\frac{AC}{AB}$, т. е.

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

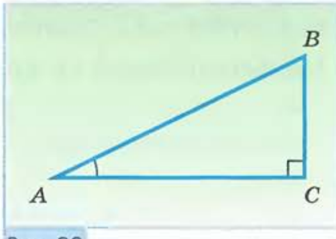


Рис. 89

Докажем, что

- **если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то косинусы этих углов равны.**

✻ Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 и равными острыми углами A и A_1 (рис. 90). Докажем, что $\cos A = \cos A_1$, т. е.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

Пусть, например, $A_1B_1 < AB$ и пусть отношение отрезка AB к отрезку A_1B_1 выражается десятичной дробью $n{,}n_1n_2...$. Это означает, что отрезок AB можно разбить точками M_1, M_2, ... на такие отрезки (см. рис. 90), что каждый из первых n отрезков равен отрезку A_1B_1, каждый из следующих n_1 отрезков равен $\frac{1}{10}A_1B_1$ и т. д.

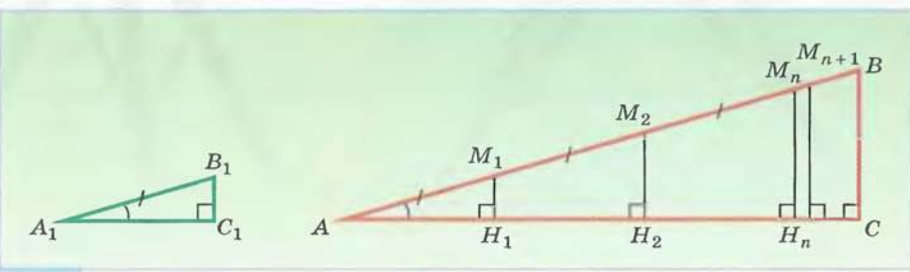


Рис. 90

Из концов этих отрезков проведём перпендикуляры M_1H_1, M_2H_2, ... к прямой AC.

Прямоугольные треугольники AM_1H_1 и $A_1B_1C_1$ равны по гипотенузе ($AM_1 = A_1B_1$) к острому углу ($\angle A = \angle A_1$), поэтому $AH_1 = A_1C_1$.

Согласно замечанию из п. 42 первые n отрезков, на которые точки H_1, H_2, ... разбивают отрезок AC, равны отрезку A_1C_1, следующие n_1 отрезков равны $\frac{1}{10}A_1C_1$ и т. д. Таким образом, отношение отрезка AC к отрезку A_1C_1 выражается той же десятичной дробью $n,n_1n_2...$, что и отношение отрезка AB к отрезку A_1B_1:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Отсюда следует пропорция $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, что и требовалось доказать. *

Доказанное утверждение позволяет говорить: «косинус острого угла», не указывая при этом, об остром угле какого именно прямоугольного треугольника идёт речь. Отметим, что так как катет меньше гипотенузы, то косинус острого угла меньше единицы.

68 Синус острого угла

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе. Синус острого угла α обозначается символом $\sin\alpha$ (читается «синус альфа»).

На рисунке 91 катет BC является противолежащим углу A, поэтому $\sin A = \frac{BC}{AB}$. Заметим, что

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \sin A,$$

а

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \sin B.$$

Поскольку $\angle B = 90° - \angle A$, то

$$\sin A = \cos(90° - A), \ \cos A = \sin(90° - A).$$

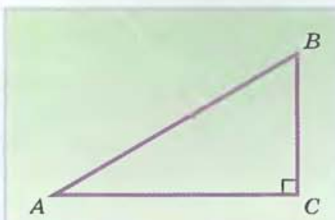


Рис. 91

Эти формулы называются формулами приведения. Из них, в частности, следует, что

- **если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны.**

В самом деле, если острые углы A и A_1 прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны (см. рис. 90), то $\angle B = \angle B_1$, поэтому $\sin A = \cos B = \cos B_1 = \sin A_1$.

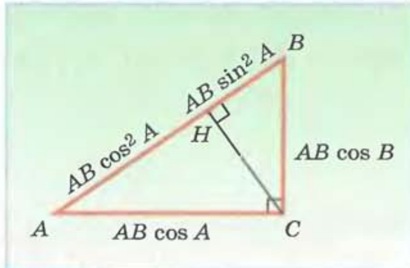


Рис. 92

Теперь можно говорить: «синус острого угла», не указывая при этом, об остром угле какого именно прямоугольного треугольника идёт речь. Отметим, что синус острого угла (так же, как и косинус) меньше единицы.

Проведём из вершины прямого угла треугольника ABC высоту CH (рис. 92). Поскольку $AC = AB \cdot \cos A$, $BC = AB \cdot \cos B$ и $\cos B = \sin A$, то

$$AH = AC \cdot \cos A = AB \cdot \cos^2 A,$$
$$HB = BC \cdot \cos B = AB \cdot \cos^2 B = AB \cdot \sin^2 A$$

Подставляя эти выражения для AH и HB в равенство $AH + HB = AB$ и сокращая на AB, получаем:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Это равенство называется основным тригонометрическим тождеством.

Синус — от латинского sinus (изгиб, кривизна).
Косинус — от латинских con (предлог «с», «совместно») и sinus.

69 Среднее геометрическое и среднее арифметическое двух отрезков

Отрезок XY называется средним геометрическим отрезков AB и CD, если $XY^2 = AB \cdot CD$.

Обратимся к рисунку 92. Так как

$$AH \cdot HB = AB^2 \cdot \cos^2 A \cdot \sin^2 A,$$
$$CH = AC \cdot \sin A = AB \cdot \cos A \cdot \sin A,$$

то $CH^2 = AH \cdot HB$, т. е. высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу. На этом факте основано решение следующей задачи на построение.

Задача

Построить среднее геометрическое данных отрезков AB и CD.

Решение

На произвольной прямой отложим последовательно отрезки $LM = AB$ и $MN = CD$, затем построим окружность с диаметром LN и через точку M проведём прямую, перпендикулярную к LN. Пусть P — одна из точек пересечения этой прямой с окружностью (рис. 93). Отрезок MP — искомый.

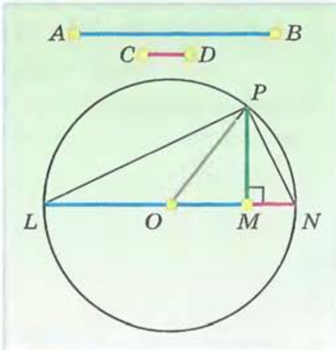


Рис. 93

В самом деле, поскольку LN — диаметр окружности, то угол P треугольника LPN прямой. Отрезок PM — высота этого треугольника, проведённая из вершины прямого угла. Следовательно, $PM^2 = LM \cdot MN = AB \cdot CD$, т. е. отрезок PM является средним геометрическим отрезков AB и CD.

Полусумму двух отрезков называют средним арифметическим этих отрезков.

Поскольку диаметр LN построенной окружности равен $AB + CD$, то её радиус OP равен среднему арифметическому отрезков AB и CD, а так как гипотенуза OP прямоугольного треугольника OPM больше его катета PM, то

среднее арифметическое двух неравных отрезков больше их среднего геометрического.

Если же два отрезка равны, то их среднее арифметическое и среднее геометрическое равны, очевидно, каждому из этих отрезков.

70 Теорема Пифагора

Теорема, которую мы сейчас докажем, называется теоремой Пифагора и является одной из важнейших теорем геометрии.

ТЕОРЕМА

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 94) и докажем, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Поскольку $AC = AB \cdot \cos A$ и $BC = AB \cdot \sin A$, то

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \cdot (\cos^2 A + \sin^2 A) = AB^2.$$

Теорема доказана.

Формулировка теоремы Пифагора была известна ещё за 2000 лет до нашей эры, но её доказательство, по-видимому, впервые нашёл древнегреческий учёный Пифагор. В настоящее время известно более ста доказательств этой теоремы.

Докажем теперь теорему, обратную теореме Пифагора.

ТЕОРЕМА

Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (рис. 95), и докажем, что $\angle C = 90°$.

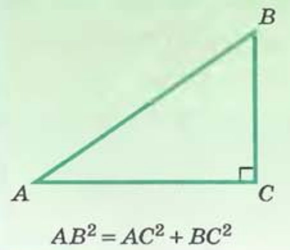


Рис. 94

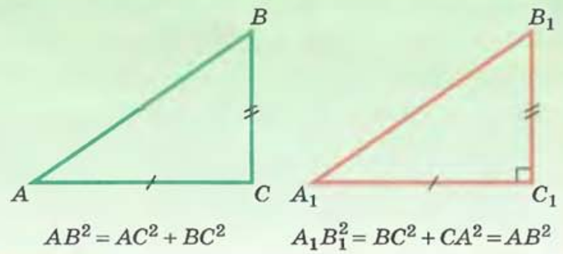


Рис. 95

Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 и катетами $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1A_1^2$, поэтому $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, откуда следует, что $A_1B_1 = AB$.

Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трём сторонам и, следовательно, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Теорема доказана.

Согласно обратной теореме Пифагора треугольник со сторонами 3, 4, 5 — прямоугольный (так как $5^2 = 3^2 + 4^2$). По аналогичной причине прямоугольными являются треугольники со сторонами 5, 12, 13, со сторонами 8, 15, 17, со сторонами 7, 24, 25 (убедитесь в этом). Прямоугольные треугольники, длины сторон которых выражаются натуральными числами, называются пифагоровыми треугольниками.

Можно доказать [12], что катеты a и b и гипотенуза c всех пифагоровых треугольников выражаются следующими формулами: $a = 2klm$, $b = k(l^2 - m^2)$, $c = k(l^2 + m^2)$, где k, l и m — произвольные натуральные числа, $l > m$.

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют египетским треугольником, поскольку он был известен ещё древним египтянам. Для построения прямых углов на местности они поступали так: завязывали на верёвке узелки, делящие её на 12 равных частей, связывали концы верёвки и растягивали на земле при помощи кольев в треугольник со сторонами 3, 4, 5. В результате угол между сторонами 3 и 4 оказывался прямым.

71 Золотое сечение

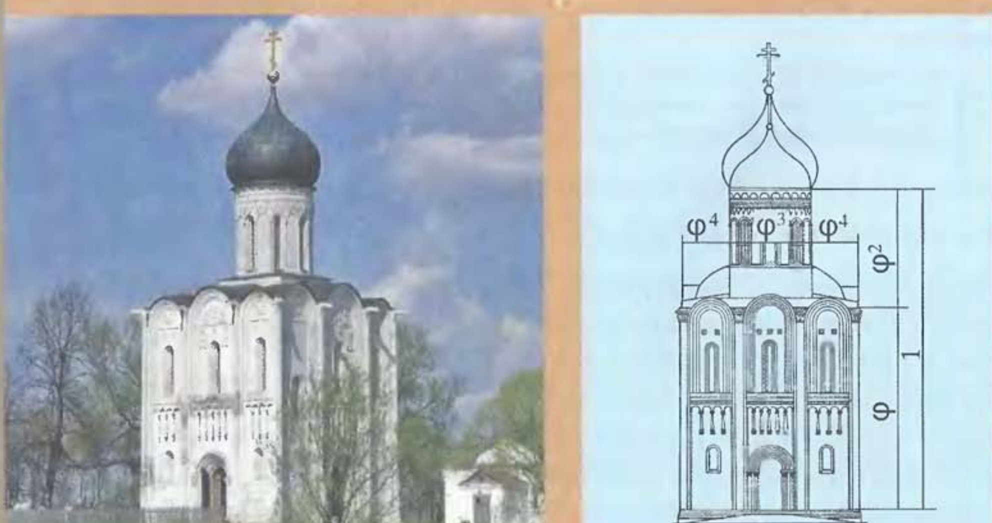
Рассмотрим отрезок AB и точку M, лежащую на нём. Говорят, что отрезки AM и MB образуют золотое сечение, если $\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AM}$ (рис. 96), т. е. отношение большей части отрезка ко всему отрезку равно отношению меньшей части к большей. Это отношение принято обозначать греческой буквой φ (фи). Поскольку $AM = \varphi AB$, $MB = \varphi AM = \varphi^2 AB$ и $AM + MB = AB$, то $\varphi AB + \varphi^2 AB = AB$, откуда для числа φ получается квадратное уравнение $\varphi + \varphi^2 = 1$, положительный корень которого выражается равенством $\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Рис. 96

Золотое сечение было известно ещё древним грекам, уделявшим большое внимание поиску красоты и совершенства. Они обнаружили, что зрительное восприятие разделённого на две части отрезка создаёт ощущение наивысшей гармонии в том случае, когда эти части образуют золотое сечение. В эпоху Возрождения золотое сечение называли даже «божественной пропорцией».

Оказывается, что пропорции золотого сечения можно обнаружить в строении человеческого тела. Это наблюдение широко используется скульпторами. Например, золотое сечение образуют многие фрагменты знаменитой статуи Аполлона Бельведерского (она хранится в одном из зданий Ватиканского музея). Даже буква φ, обозначающая отношение $AM : MB$, выбрана не случайно — это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия, систематически использовавшего золотое сечение в своих работах.

Золотое сечение часто встречается в архитектуре. Примером может служить церковь Покрова Богородицы на Нерли, попарные отношения расстояний между различными её конструкциями равны φ. Другой пример — внутренние дворы Palazzo Concellaria в Риме имеют форму прямоугольников, отношения смежных сторон которых равны φ. Золотое сечение лежит в основе композиции некоторых полотен Сальвадора Дали, Казимира Малевича и других художников.



Церковь Покрова Богородицы на Нерли

Задача

Построить золотое сечение данного отрезка AB.

Решение

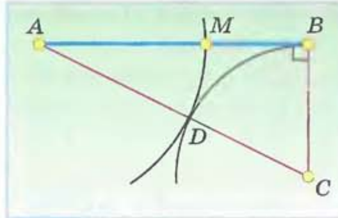


Рис. 97

Через точку B проведём луч, перпендикулярный к отрезку AB (рис. 97), и отложим на нём отрезок BC, равный половине AB. Затем проведём окружность с центром C радиуса BC и отметим точку D её пересечения с отрезком AC. Искомая точка M представляет собой точку пересечения окружности с центром A радиуса AD и отрезка AB.

В самом деле, по теореме Пифагора

$$AC^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB^2\right) = \frac{5}{4}AB^2.$$

Отсюда $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$, поэтому

$$AM = AD = AC - \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \varphi AB.$$

Вопросы и задачи

131. а) Найдите отношение отрезков $AB = 9$ см и $CD = 12$ см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в километрах?

б) Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1. Найдите A_1B_1, если $AB = 8$ мм, $CD = 5$ см и $C_1D_1 = 2$ дм.

в) Пропорциональны ли изображённые на рисунке 98: отрезки AB и CD отрезкам FH и GH; отрезки AB, BC и CD отрезкам FH, EF и EG?

г) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, отрезки AB и AO пропорциональны отрезкам AD и AC. Найдите CD, если $BC = 8$ см.

д) Точки C и C_1 лежат на отрезках AB и A_1B_1 соответственно, отрезки AC и BC пропорциональны отрезкам A_1C_1 и B_1C_1. Докажите, что $AB \cdot B_1C_1 = A_1B_1 \cdot BC$.

е) Начертите отрезок MN и постройте на нём такую точку K, что $MK : KN = 4 : 3$.

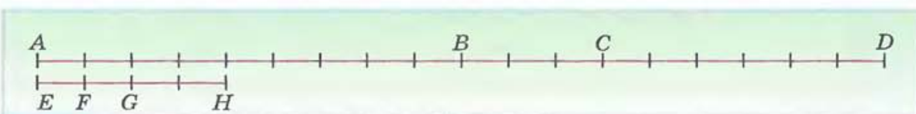


Рис. 98

132. а) Найдите отношение отрезков $AB = 6$ см и $CD = 1$ дм. Изменится ли это отношение, если длину отрезка AB выразить в дециметрах, а длину отрезка CD — в сантиметрах?

б) Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1. Найдите C_1D_1, если $AB = 3$ дм, $CD = 9$ см и $A_1B_1 = 4$ м.

в) Пропорциональны ли изображенные на рисунке 98: отрезки AB и BC отрезкам FH и GH; отрезки AC, BD и CD отрезкам EH, FH и EG?

г) Диагонали параллелограмма $KLMN$ пересекаются в точке O, отрезки KL и KO пропорциональны отрезкам LM и KM. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см.

д) Точки C и C_1 лежат на отрезках AB и A_1B_1 соответственно, отрезки AB и BC пропорциональны отрезкам A_1B_1 и B_1C_1. Докажите, что $AC \cdot B_1C_1 = A_1C_1 \cdot BC$.

е) Начертите отрезок PQ и постройте на нём такую точку R, что $PQ : QR = 5 : 1$.

133. а) Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $\angle ACB = \alpha$ и $AB = a$. Найдите BD и AD.

б) Найдите значения синуса и косинуса для углов в 30° и 60°.

в) Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

г) Постройте угол, косинус которого равен 0,3.

д) Дан отрезок AB. Постройте отрезок, являющийся средним геометрическим отрезков AB и $2AB$, и найдите его длину.

е) Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC. Докажите, что катет AC является средним геометрическим гипотенузы AB и отрезка AH.

ж) Отрезок CD — высота треугольника ABC, причём $\angle C = 90°$, $AD = 9$ см и $DB = 16$ см. Найдите $\sin A$ и $\cos A$.

з) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка E, а на катете AC — точка D так, что $DE \parallel BC$. Найдите периметр треугольника ABC, если $AE = 15$ мм, $BE = 20$ мм и $DE = DC$.

и) Отрезок CD — высота треугольника ABC с прямым углом C. Докажите, что $CD \cdot AB = AC \cdot BC$.

134. а) Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = \alpha$ и $AB = a$. Найдите BD и AD.

б) Найдите $\sin 45°$ и $\cos 45°$.

в) Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

г) Постройте острый угол, синус которого равен 0,3.

д) Дан отрезок AB. Постройте отрезок, равный $\sqrt{5}AB$.

е) Через точку A проведена касательная к окружности с центром O, а из точки касания — перпендикуляр BH к прямой AO. Докажите, что радиус окружности является средним геометрическим отрезков OA и OH.

ж) Найдите угол A трапеции $ABCD$, если $\angle C = \angle D = 90°$, $BC = 2$, $AD = 4$ и $CD = 2\sqrt{3}$.

з) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на катете AC — точка E так, что $DE \parallel BC$. Найдите BC, если $BD = DE$, $AE = 5$ дм и $EC = 4$ дм.

и) Отрезки BM и AH — медиана и высота равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Докажите, что $BC \cdot AH = AC \cdot BM$.

135. а) Отрезок CH — высота треугольника ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см и $BC = 8$ см. Найдите AB, AH и HB.

б) Основания прямоугольной трапеции равны 8 см и 12 см, бóльшая диагональ равна 13 см. Найдите боковые стороны трапеции.

в) Дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle C = \angle D = 90°$, $AB = 9$ см, $BD = 12$ см и $AD = 15$ см. Найдите синус и косинус угла CBD.

г) Через вершину тупого угла равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями проведена прямая, перпендикулярная к основаниям и делящая большее из них на два отрезка, меньший из которых равен 10 см. Найдите основания трапеции, если её боковая сторона равна 26 см.

д) Отрезок BH — высота остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$.

е) Найдите углы треугольника, стороны которого равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и 2.

ж) Стороны a и b прямоугольника образуют золотое сечение, т. е. $b : a = \varphi$. Докажите, что если от этого прямоугольника отрезать квадрат со стороной b, то смежные стороны оставшегося прямоугольника будут также образовывать золотое сечение.

136. а) Отрезок CH — высота треугольника ABC с прямым углом C. Найдите BC, AH и CH, если $AB = 20$ см и $AC = 16$ см.

б) Основания прямоугольной трапеции равны 9 см и 18 см, а бóльшая боковая сторона равна 15 см. Найдите диагонали трапеции.

в) Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, если основания трапеции равны 3 и 6.

г) Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

д) Отрезок BH — высота треугольника ABC с тупым углом A. Докажите, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

е) Найдите углы треугольника, стороны которого равны 1, $\sqrt{3}$ и 2.

ж) Стороны a и b прямоугольника образуют золотое сечение, т. е. $b : a = \varphi$. Докажите, что если к этому прямоугольнику пристроить квадрат со стороной a так, чтобы получился прямоугольник, то смежные стороны этого прямоугольника будут также образовывать золотое сечение.

§ 17 Теоремы синусов и косинусов

72 Синус и косинус углов от 90° до 180°

Докажем сначала, что

- **для любого угла α из промежутка $0° < \alpha < 90°$ справедливы равенства**

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},\quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$. Продолжим катет CA на отрезок AD, равный AB, и проведём высоту AH треугольника ABD (рис. 99, *а*). Так как треугольник ABD равнобедренный, и его внешний угол при вершине A равен α, то $BH = HD$ и $\angle B = \angle D = \frac{\alpha}{2}$ (рис. 99, *б*). Из прямоугольного треугольника ABH находим:

$$BH = AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$BD = 2BH = 2AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник BCD. В этом треугольнике

$$BC = BD\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$CD = BD\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 2AB\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

С другой стороны, в прямоугольном треугольнике ABC

$$BC = AB\cdot\sin\alpha,$$

$$CD = AC + AD = AB\cdot\cos\alpha + AB.$$

Приравнивая два полученных выражения для BC, а также для CD, после сокращения на AB приходим к формулам (1). Утверждение доказано.

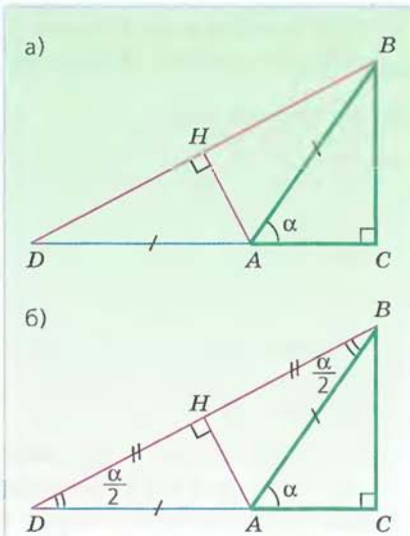


Рис. 99

Теперь, исходя из формул (1), дадим определения синуса и косинуса угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha < 180°$:

- **синусом угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha < 180°$ называется число $2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$;**
- **косинусом угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha < 180°$ называется число $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$.**

Согласно данному определению для $\alpha = 90°$ получаем:

$$\sin 90° = 2\sin 45° \cdot \cos 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$

$$\cos 90° = 2\cos^2 45° - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Определим теперь $\sin 180°$ и $\cos 180°$, исходя снова из формул (1):

$$\sin 180° = 2\sin 90° \cdot \cos 90° = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$
$$\cos 180° = 2\cos^2 90° - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Далее, используя формулы приведения и основное тригонометрическое тождество, для любого угла α из промежутка $0° < \alpha < 180°$ получаем:

$$\sin(180° - \alpha) = 2\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = 2\cos^2\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 =$$
$$= 2\left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = -\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = -\cos\alpha.$$

Таким образом, для любого угла α из промежутка $0° < \alpha < 180°$ справедливы равенства

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha; \qquad (2)$$

как и формулы п. 68, они называются формулами приведения.

Из них, в частности, следует, что синус тупого угла положителен и меньше 1, а косинус тупого угла отрицателен и больше –1. Итак,

- **синус острого, прямого и тупого углов положителен, синус развёрнутого угла равен нулю;**
- **косинус острого угла положителен, прямого угла равен нулю, а косинус тупого и развёрнутого углов отрицателен.**

Из выведенных формул следует также, что для любого α из промежутка $0° < \alpha \leqslant 180°$ имеет место основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Тангенс — от латинского tangens (касающийся). Котангенс — от латинских con (предлог «с», «совместно») и tangens. Тригонометрия — от греческих τριγωνον (треугольник) и μετρεω (меряю).

В самом деле, это равенство справедливо при $0° < \alpha < 90°$ (п. 68), а также при $\alpha = 90°$ и $\alpha = 180°$ (объясните почему). Если же $90° < \alpha < 180°$, то $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2(180° - \alpha) + \cos^2(180° - \alpha) = 1$ (поскольку $0° < 180° - \alpha < 90°$).

Замечание 1. Условимся считать, что $\sin 0° = 0$ и $\cos 0° = 1$. Нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно), что при этом формулы (1), (2) и основное тригонометрическое тождество будут верны при всех α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, а формулы приведения из п. 68 — для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

Замечание 2. Наряду с синусом и косинусом часто используются ещё две функции: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Первая из них называется тангенсом, а вторая — котангенсом; $\operatorname{tg}\alpha$ определён для всех α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, кроме $\alpha = 90°$ (так как при $\alpha = 90°$ знаменатель в формуле, определяющей $\operatorname{tg}\alpha$, обращается в нуль); $\operatorname{ctg}\alpha$ определён для всех α из промежутка $0° < \alpha < 180°$ (если $\alpha = 0°$ или $\alpha = 180°$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён, поскольку $\sin\alpha = 0$). Отметим также, что

- **тангенс острого угла положителен, тангенс тупого угла отрицателен, $\operatorname{tg} 0° = \operatorname{tg} 180° = 0$;**
- **котангенс острого угла положителен, прямого угла равен нулю, а котангенс тупого угла отрицателен.**

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла α называются тригонометрическими функциями этого угла.

73 Теорема синусов

ТЕОРЕМА

Сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла.

Доказательство. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Докажем, например, что $BC = 2R \cdot \sin A$.

Если отрезок BC — диаметр описанной окружности (рис. 100, *а*), т. е. $BC = 2R$, то $\angle A = 90°$, поэтому $\sin A = 1$ и $BC = 2R \cdot \sin A$.

Если же отрезок BC не является диаметром описанной окружности, то проведём диаметр BD (рис. 100, *б*, *в*) и рассмотрим треугольник DBC. Его угол C — прямой, поэтому

$$BC = BD \cdot \sin D = 2R \cdot \sin D.$$

Если точка D лежит на дуге BAC (рис. 100, *б*), то $\angle D = \angle A$ (вписанные углы D и A опираются на одну и ту же дугу BC).

Если точка D не лежит на дуге BAC (рис. 100, *в*), то $\angle D = 180° - \angle A$ (сумма противоположных углов D и A вписанного четырёхугольника $ABDC$ равна 180°).

И в том и в другом случае $\sin D = \sin A$. Таким образом, $BC = 2R \cdot \sin A$. Теорема доказана.

Важным следствием из доказанной теоремы является утверждение, называемое теоремой синусов.

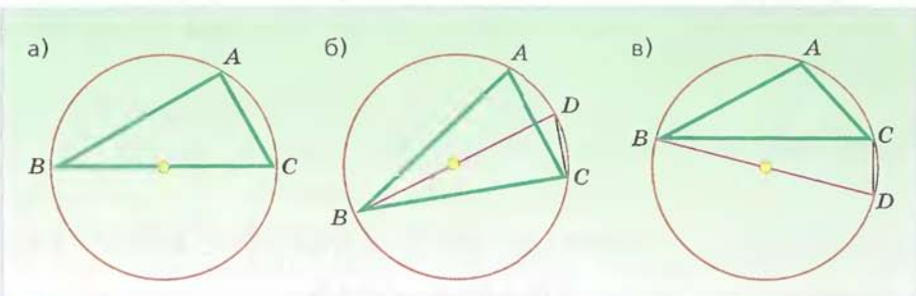


Рис. 100

ТЕОРЕМА

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Тогда каждое из отношений $\frac{BC}{\sin A}$, $\frac{CA}{\sin B}$, $\frac{AB}{\sin C}$ равно $2R$. Следовательно,

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

74 Теорема косинусов

Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему косинусов.

ТЕОРЕМА

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, например, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

В треугольнике ABC хотя бы один из углов B и C острый. Пусть, например, острым является угол C. Проведём высоту BH. Возможны три случая.

1 Угол A — острый (рис. 101, *а*). Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = c \sin A$, $AH = c \cos A$, поэтому

$$CH = CA - AH = b - c \cos A.$$

2 Угол A — прямой (рис. 101, *б*). В этом случае $BH = c = c \sin A$,

$$CH = b = b - c \cos A,$$

поскольку $\sin A = 1$ и $\cos A = 0$.

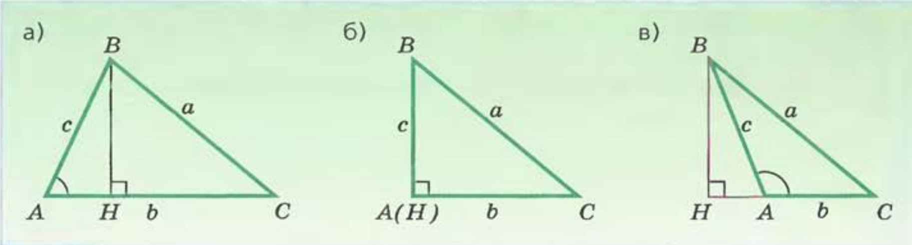


Рис. 101

3 Угол A — тупой (рис. 101, в). Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = c \sin(180° - A) = c \sin A$, $AH = c \cos(180° - A) = -c \cos A$ и, следовательно,

$$CH = CA + AH = b - c \cos A.$$

Итак, во всех трёх случаях $BH = c \sin A$, $CH = b - c \cos A$. Применяя к прямоугольному треугольнику BCH теорему Пифагора, получаем

$$a^2 = (b - c \cos A)^2 + (c \sin A)^2.$$

Раскрывая скобки и учитывая основное тригонометрическое тождество, приходим к равенствам

$$a^2 = b^2 + c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что

если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы.

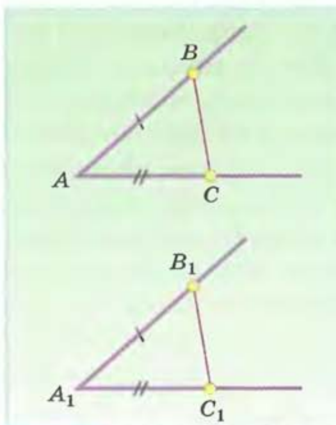


Рис. 102

✻ В самом деле, пусть $\cos A = \cos A_1$. Докажем, что $\angle A = \angle A_1$.

Если угол A развёрнутый, то $\cos A = -1 = \cos A_1$. Отсюда следует, что угол A_1 также развёрнутый (так как косинус острого, прямого и тупого углов больше -1), т. е. $\angle A_1 = \angle A$.

Если же угол A неразвёрнутый, то и угол A_1 неразвёрнутый (объясните почему). На сторонах угла A отметим произвольные точки B и C, а на сторонах угла A_1 — такие точки B_1 и C_1, что $A_1B_1 = AB$ и $A_1C_1 = AC$ (рис. 102). По теореме косинусов

$$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos A_1 = \\ = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = BC^2,$$

откуда $B_1C_1 = BC$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, поэтому $\angle A = \angle A_1$, что и требовалось доказать. *

В качестве ещё одного следствия из теоремы косинусов получаем уже известную теорему, обратную теореме Пифагора (см. п. 70):

- **если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.**

Пусть стороны a, b, c треугольника ABC связаны равенством $a^2 = b^2 + c^2$.

По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Сопоставляя эти два равенства, получаем: $\cos A = 0$, поэтому $\angle A = 90°$, и, значит, треугольник ABC — прямоугольный.

75 Решение треугольников

Решением треугольника называется нахождение всех его элементов (т. е. трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам, определяющим треугольник.

Решение треугольника основано главным образом на применении теорем синусов и косинусов, а также теоремы о сумме углов треугольника. Например, если даны две стороны треугольника и угол между ними, то можно с помощью теоремы косинусов найти третью сторону, затем воспользоваться теоремой косинусов для нахождения косинуса одного из двух неизвестных углов и по найденному косинусу найти сам угол, а другой неизвестный угол легко вычислить с помощью теоремы о сумме углов треугольника; если даны сторона и два прилежащих к ней угла, то третий угол можно найти с помощью теоремы о сумме углов треугольника, а затем, пользуясь теоремой синусов, найти неизвестные стороны; если даны три стороны, то можно с помощью теоремы косинусов найти косинусы углов треугольника, а затем по найденным значениям косинусов найти сами углы.

Задача

Решить треугольник ABC, если $AB = 5$, $AC = 7$, $\angle A = 35°$.

Угол \ Функции	$\sin A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{ctg} A$
0°	0	1	0	не определён
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	не определён	0
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	0	-1	0	не определён

Решение

Требуется найти BC, $\angle B$ и $\angle C$.

По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 25 + 49 - 70\cos 35°.$$

По таблицам (или с помощью калькулятора) находим приближённое значение косинуса угла в 35°: $\cos 35° \approx 0{,}81915$, после чего вычисляем приближённое значение стороны BC: $BC \approx 4{,}0816$. Далее, с помощью теоремы косинусов найдём $\cos B$:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \approx -0{,}17985.$$

Зная значение $\cos B$, по таблицам находим угол B: $\angle B \approx 100°22'$. И наконец, угол C находим с помощью теоремы о сумме углов треугольника: $\angle C = 180° - \angle A - \angle B \approx 44°38'$.

Теоремы синусов и косинусов могут использоваться и при доказательстве некоторых теорем, например при доказательстве теоремы о биссектрисе треугольника.

ТЕОРЕМА

Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.

Доказательство. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 103). Докажем, что $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

Применяя теорему синусов к треугольнику ABD, приходим к равенству $\frac{DB}{\sin\angle 1} = \frac{AB}{\sin\angle 3}$, откуда $\frac{DB}{AB} = \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}$.

Аналогично, рассматривая треугольник ACD, получаем:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 4}.$$

Но $\angle 2 = \angle 1$ по условию, $\angle 4 = 180° - \angle 3$, поэтому $\sin\angle 2 = \sin\angle 1$ и $\sin\angle 4 = \sin\angle 3$. Следовательно, $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Теорема доказана.

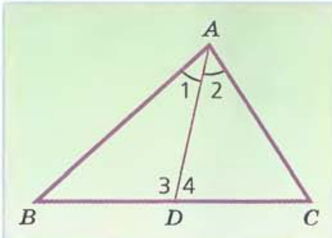


Рис. 103

76* О построении треугольника по трём сторонам

Вернёмся к вопросу, поставленному ещё в 7 классе: всегда ли можно построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам, если каждый из данных отрезков меньше суммы двух других?

Пусть данные отрезки равны a, b и c (рис. 104, *а*). Чтобы построить треугольник со сторонами, равными этим отрезкам, поступим так: на произвольной прямой отложим отрезок AB, равный c, и проведём две окружности — с центром A радиуса b и с центром B радиуса a. Если эти окружности пересекутся в некоторой точке C (рис. 104, *б*), то треугольник ABC искомый. Докажем, что указанные окружности пересекутся.

Пусть, например, $a \leqslant b \leqslant c$ и $c < a + b$ (тогда каждый из данных отрезков меньше суммы двух других).

Заметим, что если искомый треугольник ABC существует и CH — его высота (рис. 104, *в*), то

$$AH = b \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

(так как $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$). Для данных отрезков с длинами a, b и c введём величину

$$l = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Она удовлетворяет неравенствам $0 < l < b$ (докажите это).

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH с гипотенузой $AC = b$ и катетом $AH = l$. На луче AH отложим отрезок $AB = c$ (рис. 104, *г*). Треугольник ABC — искомый. Действительно, $AB = c$ и $AC = b$ по построению, а так как

$$\cos A = \frac{l}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

то

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2, \text{ т. е. } BC = a.$$

Таким образом, если каждый из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то существует треугольник, стороны которого равны данным отрезкам, и его можно построить так, как показано на рисунке 104, *б*.

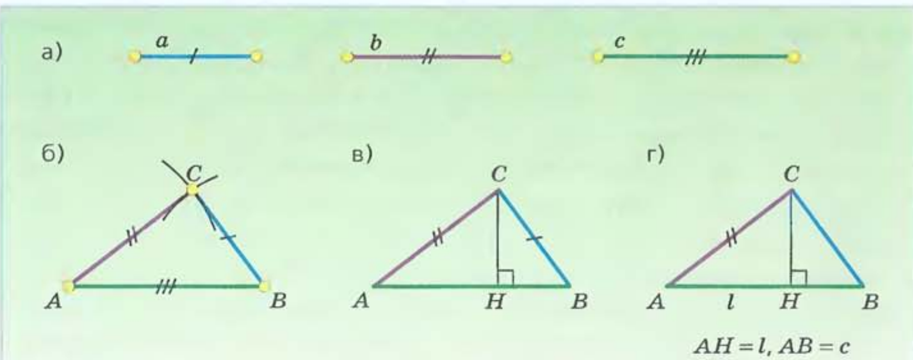


Рис. 104

77* Взаимное расположение двух окружностей

Исследуем взаимное расположение двух окружностей радиусов r_1 и r_2 с центрами O_1 и O_2 в зависимости от расстояния d между их центрами (рис. 105). Для определённости будем считать, что радиус первой окружности не меньше радиуса второй окружности ($r_1 \geqslant r_2$). Рассмотрим все возможные случаи.

1 $d > r_1 + r_2$ (рис. 105, *а*), т. е. $d - r_2 > r_1$. Поскольку для каждой точки A второй окружности в соответствии с неравенством треугольника выполняется неравенство $O_1A + r_2 \geqslant d$ (здесь знак равенства соответствует тому случаю, когда точка A лежит на отрезке O_1O_2), то $O_1A \geqslant d - r_2 > r_1$. Следовательно, все точки второй окружности лежат вне круга, ограниченного первой окружностью. В этом случае говорят, что одна окружность лежит вне другой.

2 $d = r_1 + r_2$ (рис. 105, *б*), т. е. $d - r_2 = r_1$. Так как для каждой точки A второй окружности $O_1A + r_2 \geqslant d$, то $O_1A \geqslant d - r_2 = r_1$, причём знак равенства имеет место только в том случае, когда точка A лежит на отрезке O_1O_2. Следовательно, наши окружности имеют единственную общую точку, а все остальные точки второй окружности лежат вне

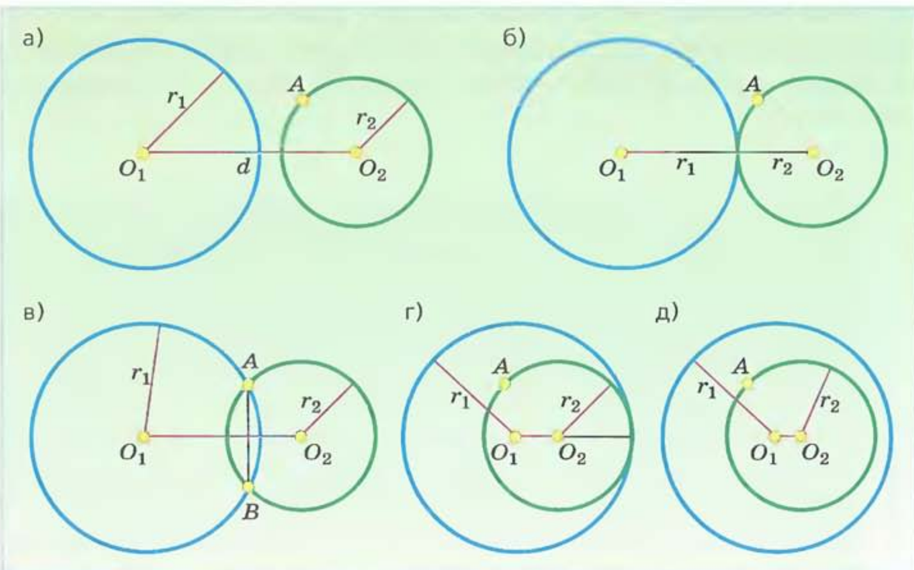


Рис. 105


Концентрические окружности — от латинских con (предлог «с», «совместно») и centrum (центр) — имеющие общий центр.

круга, ограниченного первой окружностью. В этом случае говорят, что окружности касаются друг друга извне.

3 $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ (рис. 105, в). Рассмотрим треугольник AO_1O_2 со сторонами $AO_1 = r_1$, $AO_2 = r_2$ и $O_1O_2 = d$ (поскольку $d < r_1 + r_2$, $r_1 < d + r_2$, $r_2 \leqslant r_1 < d + r_1$, то согласно результату п. 76 такой треугольник существует). Так как $O_1A = r_1$ и $O_2A = r_2$, то точка A является общей точкой данных окружностей, причём она не лежит на прямой O_1O_2. Точка B, симметричная точке A относительно прямой O_1O_2, также является общей точкой этих окружностей (объясните почему). Других общих точек данные окружности не имеют. В самом деле, если бы они имели ещё одну общую точку C, то около треугольника ABC оказались бы описанными две окружности, чего не может быть. Таким образом, в рассматриваемом случае окружности пересекаются в двух точках.

Ещё два случая возможны только при $r_1 \neq r_2$.

4 $d = r_1 - r_2$ (рис. 105, г), т. е. $d + r_2 = r_1$. В соответствии с неравенством треугольника для каждой точки A второй окружности $O_1A \leqslant d + r_2 = r_1$, причём знак равенства возможен только в том случае, когда точка O_2 лежит на отрезке O_1A. Следовательно, данные окружности имеют единственную общую точку, а все остальные точки второй окружности лежат внутри круга, ограниченного первой окружностью. В этом случае говорят, что окружности касаются друг друга изнутри.

5 $d < r_1 - r_2$ (рис. 105, д), т. е. $d + r_2 < r_1$. Так как для каждой точки A второй окружности $O_1A \leqslant d + r_2 < r_1$, то все точки второй окружности лежат внутри круга, ограниченного первой окружностью. В этом случае говорят, что одна окружность лежит внутри другой. В частности, если центры окружностей совпадают (случай $d = 0$), то окружности называются концентрическими.

Вопросы и задачи

137. а) Найдите синус и косинус углов в 120°, 135° и 150°.

б) Постройте тупой угол A, если $\sin A = \frac{3}{4}$.

в) Докажите, что тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему.

г) Найдите тангенс и котангенс углов в 30°, 45°, 60°, 120°, 135° и 150°.

д) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AB = BC = a$ и $\angle A = \alpha$.

е) Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 80°$, $\angle B = 70°$ и $AB = 9$. Найдите угол C и приближённые значения AC и BC.

ж) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $4\sqrt{3}$, $\angle A = 50°$ и $\angle C = 70°$. Найдите AC.

з) Найдите биссектрису AD треугольника ABC, если $AB = BC$, $\angle A = 2\alpha$ и $AC = b$.

и) Основание высоты AH треугольника ABC лежит на стороне BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AB = 7$, $AC = 6$ и $AH = 3$. Изменится ли ответ, если точка H лежит на продолжении стороны BC?

к) Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. Найдите $BD : DC$, если $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$ и $\angle DAC = \beta$.

138. а) Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

б) Постройте угол A, для которого $\cos A = -\frac{4}{5}$.

в) Докажите, что котангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к противолежащему.

г) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

д) Основания трапеции равны m и n, а углы, прилежащие к основанию m, равны α и β. Найдите расстояние между прямыми, содержащими основания трапеции.

е) Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 65°$, $\angle C = 55°$ и $AC = 11$. Найдите угол B и приближённые значения AB и BC.

ж) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle A = 22°$, $\angle C = 8°$ и $AC = 30$ см.

з) Высота AH остроугольного треугольника ABC равна h, $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Найдите BC.

и) На продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD, равны.

к) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке M, $BC = a$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ и $\beta > \gamma$. Найдите AM.

139. а) Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны 2, 3 и 4; 4, 5 и 6; 1, 2 и $\sqrt{3}$?

б) Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$ и $AB = 2\sqrt{7}$. Найдите медиану AM.

140. а) Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны 5, 6 и 7; 3, 4 и 6; $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$?

б) Найдите бо́льшую диагональ параллелограмма $ABCD$, если $AD = 4$, $\angle A = 60°$, а высота BH треугольника ABD равна $\sqrt{3}$.

141. а) Решите треугольник ABC, если $BC = 7$, $AC = 10$ и $AB = 11$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, 5 и 8.

в) Боковые стороны трапеции равны 9 см и 12 см, а её основания равны 30 см и 15 см. Найдите угол между продолжениями боковых сторон.

г) Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 21$ и $BC = 28$. Найдите AD и BD.

д) Основание равнобедренного треугольника меньше его боковой стороны на 4,5 см, биссектриса делит боковую сторону в отношении 2 : 3. Найдите периметр этого треугольника.

е) Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $BD : AB = CD : AC$.

ж) Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB = 2$ и $AC = 5$. Прямая DE параллельна AB и пересекает прямую AC в точке E. Найдите отношение $AE : EC$.

з) Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке O так, что $AE : EC = 4 : 9$, $BC : BD = 11 : 4$. Найдите отношение $AO : OD$.

142. а) Решите треугольник ABC, если $\angle A = 79°$, $AB = 15$ и $AC = 11$.

б) Найдите биссектрисы треугольника, если одна из его сторон равна a, а прилежащие к этой стороне углы равны α и β.

в) Диагонали трапеции равны 5 см и 12 см, а её основания равны 3 см и 10 см. Найдите угол между диагоналями.

г) Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AB = 15$ см и $AC = 12$ см. Найдите BD и CD.

д) Биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AB делит боковую сторону BC на отрезки, равные 10 см и 15 см, считая от вершины C. Найдите периметр треугольника.

е) Отрезок AM — медиана треугольника ABC, в котором $\angle MAB = \beta$ и $\angle MAC = \gamma$. Докажите, что $\dfrac{\sin\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$.

ж) Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB = c$ и $AC = b$. Прямая DE параллельна AB и пересекает AC в точке E. Докажите, что $AE = \dfrac{bc}{b + c}$.

з) Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, точка O — центр вписанной в него окружности, $AB = 9$ см, $BC = 12$ см и $CA = 5$ см. Найдите отношение $AO : OD$.

§ 18 Подобные треугольники

78 Свойство углов подобных треугольников

Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры (две вложенные друг в друга матрёшки, здание и его макет и т. д.). В геометрии такие фигуры называются подобными. Изучение подобных фигур мы начнём с определения подобных треугольников.

Определение

Два треугольника называются подобными, если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Иными словами, два треугольника называются подобными, если для них можно ввести обозначения ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 106) так, что $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA}$, или, что то же самое,

$$A_1B_1 = kAB,\ B_1C_1 = kBC,\ C_1A_1 = kCA, \qquad (1)$$

где k — некоторое положительное число. Число k называется коэффициентом подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC (точнее, коэффициентом подобия треугольника $A_1B_1C_1$ относительно треугольника ABC). Подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC обозначается так: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

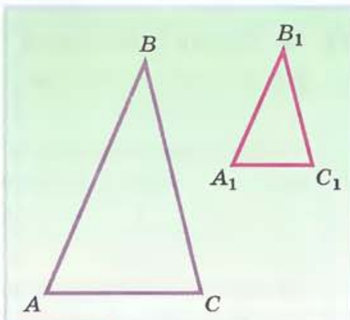


Рис. 106

Коэффициент — от латинского coefficiens (содействующий).

Отметим, что если $k = 1$, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трём сторонам. Поэтому равенство треугольников является частным случаем их подобия.

Докажем теорему об углах подобных треугольников.

ТЕОРЕМА

Если два треугольника подобны, то углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника.

Доказательство. Пусть треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны, т. е. их стороны связаны равенствами (1). Докажем, что $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle C_1 = \angle C$ (рис. 107).

Рассмотрим сначала треугольник $A_1B_1C_1$. По теореме косинусов

$$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + C_1A_1^2 - 2A_1B_1 \cdot C_1A_1 \cdot \cos A_1.$$

Подставляя сюда выражения сторон треугольника $A_1B_1C_1$ по формулам (1) и сокращая на k^2, получаем

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cdot \cos A_1.$$

Рассмотрим теперь треугольник ABC. По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cdot \cos A.$$

Сопоставляя полученные равенства, приходим к выводу: $\cos A_1 = \cos A$ и, следовательно, $\angle A_1 = \angle A$ (см. п. 74).

Справедливость равенств $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle C_1 = \angle C$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

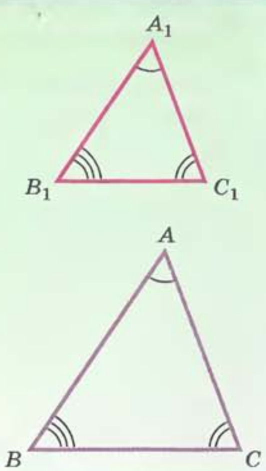


Рис. 107

79 Признаки подобия треугольников

ТЕОРЕМА

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC, у которых $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $\angle B_1 = \angle B$ (рис. 108). Докажем, что $C_1A_1 = kCA$ и, следовательно, $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

Согласно теореме косинусов

$$C_1A_1^2 = A_1B_1^2 + B_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot \cos B_1 = \\ = k^2(AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B) = k^2CA^2.$$

Итак, $C_1A_1^2 = k^2CA^2$, поэтому $C_1A_1 = kCA$. Теорема доказана.

Доказанная теорема выражает первый признак подобия треугольников. Докажем теорему, выражающую второй признак подобия треугольников.

ТЕОРЕМА

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC (рис. 109), у которых $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, и докажем, что они подобны.

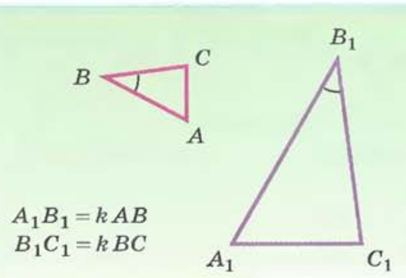


Рис. 108

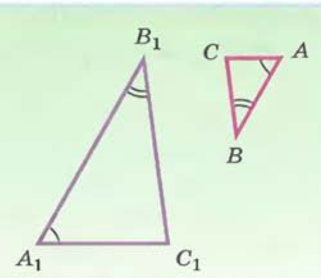


Рис. 109

Так как углы A_1 и A, B_1 и B равны, то равны также углы C_1 и C.

Пусть R_1 и R — радиусы окружностей, описанных около треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC. Согласно теореме пункта 73

$$A_1B_1 = 2R_1 \sin C,\ \ B_1C_1 = 2R_1 \sin A,\ \ C_1A_1 = 2R_1 \sin B,$$
$$AB = 2R \sin C,\ \ BC = 2R \sin A,\ \ CA = 2R \sin B.$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{R_1}{R}.$$

Следовательно, стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны сторонам треугольника ABC, т. е. треугольники подобны. Теорема доказана.

80 Теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной

ТЕОРЕМА

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство. Пусть E — точка пересечения хорд AB и CD (рис. 110). Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. Их углы A и C равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD. По аналогичной причине $\angle D = \angle B$. Поэтому треугольники ADE и CBE подобны (по второму признаку подобия треугольников). Таким образом, $\frac{DE}{BE} = \frac{AE}{CE}$, или

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Теорема доказана.

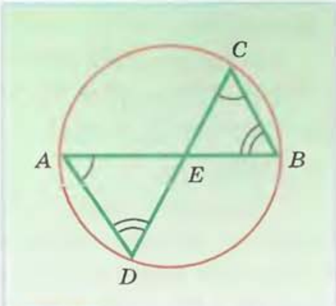


Рис. 110

ТЕОРЕМА

Если через точку M проведены касательная MK, где K — точка касания, и секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то $MK^2 = MA \cdot MB$.

Доказательство. Проведём отрезки AK и BK (рис. 111). Треугольники AKM и KBM подобны по второму признаку подобия треугольников: угол M у них общий, а углы AKM и B равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги AK (угол AKM — это угол между касательной и хордой, а угол B — вписанный). Поэтому $\frac{MK}{MB} = \frac{MA}{MK}$, или $MK^2 = MA \cdot MB$. Теорема доказана.

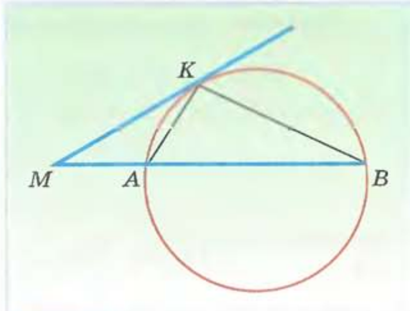


Рис. 111

Обычно эту теорему формулируют кратко:

- **квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.**

81 Построение пропорциональных отрезков

Признаки подобия треугольников широко используются при решении задач на построение. Приведём два примера.

Задача

Разделить данный отрезок AB на отрезки AM и MB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2.

Решение

Проведём какой-нибудь луч с началом A, не лежащий на прямой AB, и отложим на нём последовательно отрезки AC и CD, равные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 112).

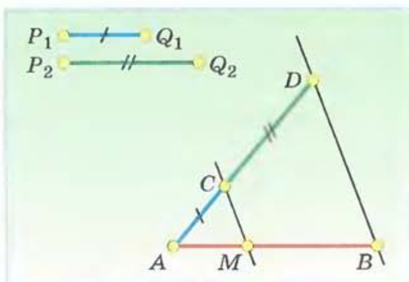


Рис. 112

Проведём прямую BD, а затем через точку C проведём прямую, параллельную BD. Она пересечёт прямую AB в некоторой точке M.

Треугольники ABD и AMC подобны по второму признаку подобия треугольников (угол A у них общий, углы B и M — соответственные, образованные при пересечении параллельных прямых BD и MC секущей AB), поэтому

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AM},$$

т. е.

$$\frac{AC + CD}{AC} = \frac{AM + MB}{AM}.$$

Из этого следует, что

$$\frac{CD}{AC} = \frac{MB}{AM},$$

или

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MB}{CD}.$$

Так как $AC = P_1Q_1$ и $CD = P_2Q_2$, то $\frac{AM}{P_1Q_1} = \frac{MB}{P_2Q_2}$. Таким образом, точка M — искомая.

Задача

Даны три отрезка с длинами a, b и c. Построить отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

Решение

Построим какой-нибудь неразвёрнутый угол с вершиной O и на одной из его сторон отложим последовательно отрезки $OC = c$ и $CB = b$, а на другой стороне — отрезок $OA = a$ (рис. 113). Проведём прямую AC, а затем через точку B проведём прямую, параллельную AC. Она пересечёт прямую OA в некоторой точке M. Отрезок AM искомый.

В самом деле, в ходе решения предыдущей задачи мы установили, что $\frac{a}{c} = \frac{AM}{b}$ (сравните рисунки 112 и 113). Следовательно,

$$AM = \frac{ab}{c}.$$

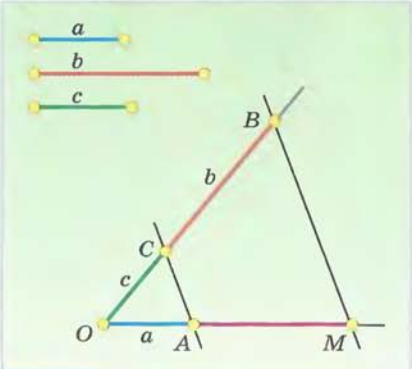


Рис. 113

82 Метод подобия

Метод подобия при решении задач на построение состоит в том, что сначала, используя только часть данных, строят фигуру, подобную искомой, а затем, привлекая остальные данные, строят искомую фигуру. Приведём пример решения задачи на построение методом подобия.

Задача

Построить треугольник ABC с данным острым углом B, в котором $AB : BC = 3 : 2$ и высота CD равна данному отрезку PQ.

Решение

На сторонах данного угла B отложим отрезки BA_1 и BC_1, равные соответственно $3PQ$ и $2PQ$ (рис. 114, *а*). Треугольник A_1BC_1 подобен искомому по первому признаку подобия треугольников. Если его высота C_1D_1 равна PQ, то треугольник A_1BC_1 — искомый.

Пусть $C_1D_1 \neq PQ$. Искомая точка C находится от прямой BA_1 на расстоянии, равном PQ, т. е. принадлежит множеству точек, удалённых от прямой BA_1 на расстояние, равное PQ. Следовательно, точка C лежит на прямой, параллельной BA_1 и удалённой от неё на расстояние, равное PQ. Построим эту прямую (прямая a на рисунке 114, *б*) и обозначим буквой C точку её пересечения с прямой BC_1.

Через точку C проведём прямую, параллельную A_1C_1 и пересекающую прямую BA_1 в некоторой точке A. Треугольник ABC искомый.

В самом деле, угол B у него данный, высота CD равна PQ, а так как $AC \parallel A_1C_1$, то треугольники ABC и A_1BC_1 подобны (докажите это), поэтому $AB : A_1B = BC : BC_1$ и, следовательно,

$$AB : BC = A_1B : BC_1 = 3 : 2.$$

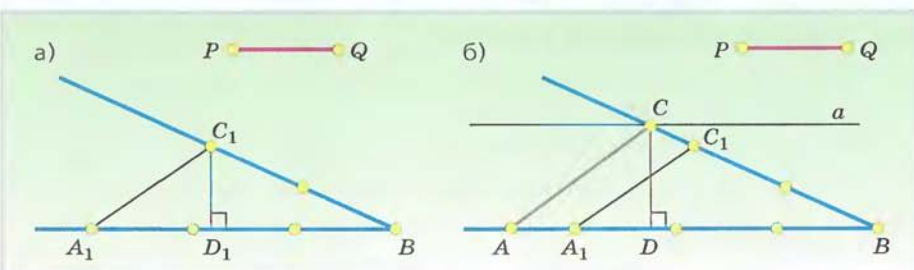


Рис. 114

83* Построение трёх правильных многоугольников

С помощью циркуля и линейки построим золотое сечение данного отрезка PQ (см. п. 71), т. е. построим на нём такую точку M, что $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$, где $a = PM$ и $b = PQ$ (рис. 115, *а*). Затем построим равнобедренный треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AB = AC = b$ и на его стороне AB отложим отрезок $AD = a$ (рис. 115, *б*).

Треугольники CBD и ABC подобны по первому признаку: угол B у них общий, $\frac{BC}{AB} = \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} = \frac{BD}{BC}$. Поскольку $AB = AC$, то $CD = CB = a$, поэтому треугольники BCD и ADC равнобедренные (рис. 115, *в*) и, следовательно, $\angle B = \angle C = 2\angle A$. Из треугольника ABC находим: $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 2\angle A + 2\angle A = 180°$, откуда $\angle A = 36°$.

Итак, мы можем построить с помощью циркуля и линейки угол в 36°. Кроме того, мы умеем строить угол в 30°. Поэтому мы можем построить угол в 6° (так как $6° = 36° - 30°$), а значит, и угол в 3°.

Проведём теперь какую-нибудь окружность с центром O и построим её центральный угол A_1OA_2, равный $8 \cdot 3° = 24°$. Поскольку $15 \cdot 24° = 360°$, то отрезок A_1A_2 равен стороне правильного 15-угольника, вписанного в эту окружность. Последовательно откладывая (начиная от точки A_2) хорды, равные A_1A_2, получим правильный 15-угольник $A_1A_2...A_{15}$. Аналогично, умея строить углы в 36° и 72°, можно построить правильный 10-угольник и правильный 5-угольник.

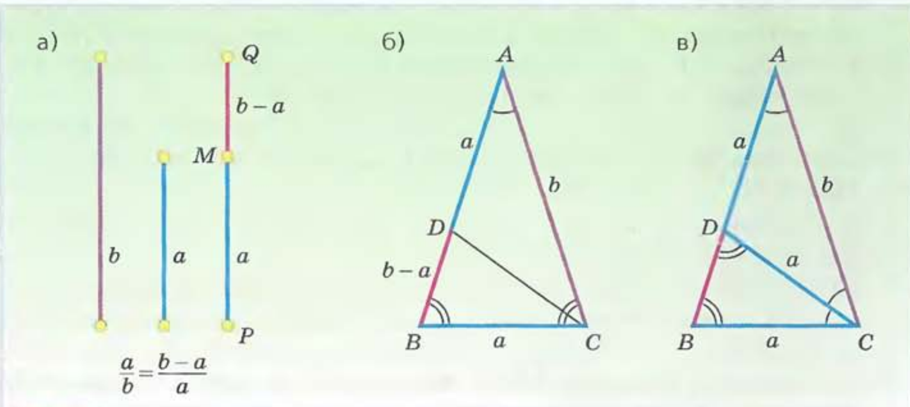


Рис. 115

Вопросы и задачи

143. а) Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника, подобен данному треугольнику.

б) Стороны AB, BC и CA треугольника ABC пропорциональны сторонам DE, EF и FD треугольника DEF, $\angle C = 50°$ и $\angle D = 70°$. Найдите остальные углы треугольников.

в) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M так, что $\triangle ABM \backsim \triangle ABC$. Найдите AB, если $BM = 4$ и $CM = 5$.

г) Диагональ AC разделяет трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 3$ на два подобных треугольника. Найдите AC.

144. а) Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

б) Стороны EF, FD, DE треугольника EFD пропорциональны сторонам AB, BC и CA треугольника ABC и $\angle A + \angle D = 110°$. Найдите угол B.

в) На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и N так, что $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$. Найдите AN, если $AM = 5$ см, $BM = 9$ см и $AC = 7$ см.

г) Диагональ AC, равная 6 см, разделяет трапецию $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 4$ см и $CD = 6$ см на два подобных треугольника. Найдите периметр трапеции.

145. а) Даны треугольники ABC и DEF, в которых $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$, $EF = 14$ см, $DF = 20$ см и $BC = 21$ см. Найдите AC.

б) Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P, а прямую DC — в точке Q, $BP = 3$ см, $CP = 2$ см и $CQ = 3$ см. Найдите периметр параллелограмма.

в) Продолжения сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E, $CE = 3$ см, $CD = 2$ см и $AD - BC = 2$ см. Найдите основания трапеции.

г) Через точку M стороны AB треугольника ABC проведены прямые, параллельные AC и BC и пересекающие стороны BC и AC в точках N и L соответственно. Докажите, что $AL \cdot BN = MN \cdot ML$.

д) Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q, а медиану AM — в точке R. Докажите, что $PR = RQ$.

е) Отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что $AC \cdot CB_1 = BC \cdot CA_1$.

ж) Отрезки BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC с острым углом A. Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны, и найдите коэффициент их подобия.

з) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, периметры треугольников OAD и OBC относятся как 4 : 1, сумма оснований AD и BC равна 10 см. Найдите AD и BC.

и) Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причём $AO : OC = DO : OB$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

к) Отрезки AM и A_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle B = \angle B_1$ и $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$. Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

л) Отрезки AD и BC — основания трапеции $ABCD$, $AC^2 = AD \cdot BC$. Докажите, что $AB^2 \cdot AD = CD^2 \cdot BC$.

м) Четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый, а четырёхугольник $ABED$ — невыпуклый, $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BAE = \angle BDC$. Докажите, что $\triangle BCE \backsim \triangle ABD$.

146. а) Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

б) Через вершину A параллелограмма $ABCD$ со стороной $AB = 3$ см и периметром 14 см проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P, а прямую DC — в точке Q. Найдите CP, если $DQ = 6$ см.

в) Основание BC трапеции $ABCD$ на 5 см меньше её средней линии. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке E, причём $CD = 2CE$. Найдите основания трапеции.

г) На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q, прямая PQ пересекает лучи BA и DC в точках M и N. Докажите, что $AP \cdot CN = AM \cdot CQ$.

д) В треугольник ABC вписан квадрат со стороной a так, что две его смежные вершины лежат на стороне AC, равной b, а две другие вершины — на сторонах AB и BC. Найдите высоту BH треугольника ABC.

е) Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$.

ж) Отрезки BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC с тупым углом A. Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны, и найдите коэффициент их подобия.

з) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Периметры треугольников OAD и OBC относятся как $5 : 3$, $AC = 24$ см. Найдите AO и OC.

и) На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки P, Q, R и T так, что $BP : BQ = DR : DT$. Докажите, что $PQ \parallel RT$.

к) Отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $AB : AD = A_1B_1 : A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

л) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D так, что $AC^2 = AB \cdot AD$. Докажите, что $AB \cdot CD^2 = AD \cdot BC^2$.

м) Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и AC отмечены точки D и E так, что $\angle BDM = \angle CME$. Докажите, что $\triangle BDM \backsim \triangle MDE$.

147. а) Хорды AB и CD пересекаются в точке M, $AB = 15$ см, $AM = 3$ см и $CM = DM$. Найдите CD.

б) Диаметр окружности с центром O, равный 20 см, пересекает хорду AB в точке M, $AM = 3$ см и $MB = 12$ см. Найдите OM.

в) Через точку C, лежащую на продолжении диаметра AB окружности за точку B, проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Найдите CK, если радиус окружности равен 2,5 см и $BC = 4$ см.

г) Через точку M, лежащую на продолжении общей хорды двух окружностей, проведены прямые, касающиеся этих окружностей в точках K и L. Докажите, что $MK = ML$.

д) Прямая AM пересекает окружность радиуса 4 дм в точках A и B, точка B лежит между A и M. Найдите расстояние от точки M до центра окружности, если $AB = 25$ см и $MB = 2$ дм.

е) На гипотенузе AC данного прямоугольного треугольника ABC постройте такую точку D, что $AB^2 = AD\,(AD + 2CD)$.

ж) Данный отрезок разделите в отношении $2 : 3 : 5$.

з) Даны отрезки с длинами a и b. Постройте отрезок, равный $\frac{a^2}{b}$.

и) Постройте треугольник ABC по углам A и B и медиане AM.

к) Даны угол и отрезок. Постройте треугольник ABC, в котором угол A равен данному углу, $AB : AC = 2 : 5$, а расстояние от точки пересечения медиан до вершины B равно длине данного отрезка.

148. а) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, причём $AM : MB = 1 : 2$, $CD = 18$ см и $CM = 6$ см. Найдите AB.

б) На хорде AB окружности с центром O отмечена точка M. Известно, что $AM = 5$ см и $MB = MO = 4$ см. Найдите радиус окружности.

в) Дуга AB окружности радиуса $\sqrt{2}$ равна 60°. На продолжении хорды AB за точку B отмечена точка C так, что $BC = AB$, и через неё проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Найдите CK.

г) Через точку M, лежащую вне окружности, проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D. Докажите, что $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

д) Прямая LM пересекает окружность радиуса 8 см в точках K и L, точка L лежит между точками K и M. Расстояние от точки M до центра окружности равно 10 см и $ML = 4$ см. Найдите KL.

е) На стороне BC данного треугольника ABC с тупым углом A постройте такую точку M, что $AC^2 = CM \cdot CB$.

ж) Данный отрезок разделите в отношении $1 : 4 : 7$.

з) Даны отрезки с длинами a и b. Постройте отрезок, равный $\frac{a + b}{a}b$.

и) Даны угол и отрезок. Постройте треугольник ABC, в котором угол A равен данному углу, $AB : AC = 3 : 5$ и биссектриса AD равна данному отрезку.

к) Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов, равному отношению двух данных отрезков.

Вопросы для повторения

1. Объясните, как измеряются отрезки. Что называется отношением двух отрезков? Как связано отношение двух отрезков с длинами этих отрезков?
2. В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?
3. Что называется косинусом острого угла прямоугольного треугольника? Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то косинусы этих углов равны.
4. Что называется синусом острого угла прямоугольного треугольника? Как связаны синус и косинус острого угла A с косинусом и синусом угла $90° - A$?
5. Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны.
6. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством? Докажите справедливость этого тождества для острого угла.
7. Какой отрезок называется средним геометрическим двух данных отрезков? Объясните, как с помощью циркуля и линейки построить отрезок, равный среднему геометрическому двух данных отрезков.
8. Какой отрезок называется средним арифметическим двух данных отрезков? Докажите, что среднее арифметическое двух неравных отрезков больше их среднего геометрического.
9. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
10. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
11. Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры пифагоровых треугольников.
12. Какой треугольник называется египетским?
13. Объясните, что такое золотое сечение.
14. Чему равно отношение двух отрезков, образующих золотое сечение?
15. Объясните, как с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на два отрезка, образующих золотое сечение.
16. Докажите, что для любого угла α из промежутка $0° < \alpha < 90°$ справедливы равенства $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$.
17. Объясните, как определяются синус и косинус угла α, если $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Как связаны синус и косинус угла α с синусом и косинусом угла $180° - \alpha$?

18. Докажите справедливость основного тригонометрического тождества для произвольного значения α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

19. Что называется тангенсом и котангенсом угла α?

20. Докажите теорему: сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла.

21. Какое утверждение называется теоремой синусов? Докажите эту теорему.

22. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.

23*. Докажите, что если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы.

24. Докажите теорему, обратную теореме Пифагора, с помощью теоремы косинусов.

25. Что означают слова «решение треугольника»?

26. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе треугольника.

27*. Докажите, что если каждый из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то можно построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам.

28*. Опишите все случаи взаимного расположения двух окружностей.

29. Дайте определение подобных треугольников. Что называется коэффициентом подобия треугольников?

30. Докажите, что если два треугольника подобны, то углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника.

31. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак подобия треугольников.

32. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак подобия треугольников.

33. Сформулируйте и докажите теорему об отрезках пересекающихся хорд.

34. Сформулируйте и докажите теорему о квадрате касательной.

35. Объясните, как с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на два отрезка, пропорциональных данным отрезкам.

36. Объясните, как, имея отрезки с длинами a, b и c, построить с помощью циркуля и линейки отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

37. Объясните, в чём состоит метод подобия решения задач на построение. Приведите пример задачи на построение, решаемой методом подобия.

38*. Объясните, как построить правильный n-угольник при $n = 15$, $n = 10$ и $n = 5$.

Дополнительные задачи

§ 16

149. Два острых угла равны α и β. Докажите, что если $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha > \sin\beta$, и обратно: если $\sin\alpha > \sin\beta$, то $\alpha > \beta$.

150. Два острых угла равны α и β. Докажите, что если $\alpha > \beta$, то $\cos\alpha < \cos\beta$, и обратно: если $\cos\alpha < \cos\beta$, то $\alpha > \beta$.

151. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 5, $AB = 3$, $BD = 4$, отрезок CM — перпендикуляр к прямой BD. Найдите синус угла BCM.

152. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM : MA = 1 : \sqrt{3}$. Основание перпендикуляра, проведённого из точки M к прямой BC, равноудалено от точек M и C. Найдите углы A и B.

153. Найдите синус острого угла ромба, диагонали которого равны 4 см и 3 см.

154. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC имеет место неравенство $BC \geqslant (AB + AC)\sin\dfrac{A}{2}$.

155. Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе. Докажите, что $BH \cdot AC^2 = AH \cdot BC^2$.

156. Правильный треугольник и правильный шестиугольник имеют общую сторону, равную a, и лежат по одну сторону от неё. Найдите расстояние между центрами этих многоугольников.

157. Стороны треугольника равны 25, 39 и 56. Найдите высоту, проведённую к большей стороне.

§ 17

158. Через середину медианы AM равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая боковые стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Найдите PQ, если $AM = m$, $\angle BAM = \alpha$, $\angle APQ = \beta$.

159. Основание высоты AH треугольника ABC лежит на стороне BC, $AC = 5$ см, $CH = 3$ см. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 10 см. Найдите AB.

160. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM = BM = 1$. Найдите угол ABC, если $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$.

161. Внутри угла A, равного α, отмечена точка M, удалённая от сторон угла на расстояния a и b. Найдите AM.

162. Докажите, что углы произвольного треугольника ABC связаны равенством $2\sin A \cdot \sin B \cdot \cos C - 1 = \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B$.

163. На диаметре окружности отмечена точка M, хорда AB параллельна этому диаметру. Докажите, что величина $MA^2 + MB^2$ не зависит от положения хорды AB.

164. Отрезок AD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, равным 18 мм, $CD = 12$ мм. Найдите периметр треугольника ABC.

165. В треугольник ABC с периметром 55 см вписан ромб $ADEF$ так, что точки D, E и F лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA. Найдите AC и AB, если $BE = 12$ см, $EC = 8$ см.

166. Основание равнобедренного треугольника относится к его боковой стороне как 2 : 5, а высота, проведённая к основанию, равна 18 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса угла при основании делит указанную высоту.

167. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D так, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Докажите, что отрезок AD — биссектриса треугольника ABC.

168. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что если $\angle ABD > \angle DBC$, то $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$.

169. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Докажите, что $BD = \frac{ac}{b+c}$ и $CD = \frac{ab}{b+c}$.

170. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, точка O — центр вписанной в него окружности. Докажите, что $AO : OD = (AB + AC) : BC$.

171. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$. На прямой AC отмечена такая точка E, что $DE \perp AD$. Докажите, что $AE = \frac{2bc}{b+c}$.

172. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$. Докажите, что $AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$.

173. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, $AB = c$, $AC = b$, $BD = m$, $CD = n$. Докажите, что $AD^2 = bc - mn$.

174. Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC пересекает прямую AC в точке D. Найдите AD, если $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $CA = 2$ см.

175. Угол B — меньший из углов треугольника ABC со сторонами 16 см, 20 см и 24 см. Биссектрисы угла B и внешнего угла с вершиной B пересекают прямую AC в точках D и E. Найдите DE.

176*. Две окружности касаются друг друга извне. Докажите, что отрезок их общей касательной, концами которого являются точки касания, равен среднему геометрическому диаметров окружностей.

177*. Две окружности касаются друг друга извне. Прямая, проходящая через точку касания, пересекает окружности в точках P и Q, PM и QN — отрезки касательных, проведённые из точек P и Q к окружностям. Докажите, что $PM^2 + QN^2 = PQ^2$.

178*. Две окружности пересекаются в точках A и B. Каждый из отрезков AC и AD является хордой одной окружности и касается другой. Докажите, что $AC \cdot BA = AD \cdot BC$.

179*. Две окружности касаются друг друга извне. Две прямые касаются одной окружности в точках A и B, другой — в точках C и D соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ACDB$ — равнобедренная трапеция.

180*. Две окружности касаются друг друга изнутри в точке B, отрезок AB — диаметр большей окружности. Угол между хордами AC и AD, касающимися меньшей окружности, равен 60°. Найдите AC, если расстояние между центрами окружностей равно d.

181*. Две окружности радиусов 4 см и 1 см касаются друг друга изнутри. Хорда большей окружности касается меньшей окружности, а её продолжение образует с общей касательной к окружностям угол в 60°. Найдите эту хорду.

182*. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга извне, и каждая из них касается изнутри окружности радиуса 10 с центром O_3. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

§ 18

183. Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: по равному острому углу; по равному тупому углу; по прямому углу? Ответ обоснуйте.

184. На сторонах AC и BC треугольника ABC, в котором $AB = 12$ см, $BC = 18$ см, $CA = 27$ см, отмечены соответственно точки A_1 и B_1 так, что $A_1C = 18$ см, $B_1C = 12$ см. Докажите, что пять элементов (т. е. сторон и углов) треугольника ABC равны элементам треугольника A_1B_1C.

185. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$, в которой $BC : AD = 1 : 2$, отмечена точка M так, что $CM : MD = 1 : 2$. Докажите, что прямая AM делит отрезок BD пополам.

186. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$, в которой $BC : AD = 1 : 3$ и $AB = AD$, отмечена точка M так, что $CM : MD = 2 : 3$. Докажите, что $BD \perp AM$.

187. Докажите, что если угол A треугольника ABC вдвое больше угла B, то $BC^2 = AC^2 + AB \cdot AC$, и обратно: если $BC^2 = AC^2 + AB \cdot AC$, то угол A вдвое больше угла B.

188. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке E. Докажите, что $\triangle ADC \sim \triangle ABE$, и, пользуясь этим, приведите ещё одно решение задачи 173.

189. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки P, Q, R и T так, что $AP : CR = AT : CQ = 1 : 2$. В каком отношении прямая QT делит отрезок PR?

190. Отрезок AB — диаметр окружности с центром O, хорда BC пересекает окружность с диаметром OB и центром O_1 в точке M. Прямая MO_1 пересекает бо́льшую окружность в точках P и Q, $PM = 2$ см, $MQ = 8$ см. Найдите BC.

191. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB : BC = 2 : 3$. Прямая, проходящая через точку D, пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках P и Q. Найдите AC, если $DP = 4$ см, $DQ = 6$ см.

192. Луч AC — биссектриса угла A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность. Докажите, что $AC \cdot BD = AB \cdot BC + AD \cdot DC$.

193. Постройте прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 3 : 5, а периметр равен длине данного отрезка.

194. Постройте остроугольный треугольник по двум углам и отрезку, длина которого равна расстоянию от ортоцентра до вершины третьего угла.

195. Постройте равнобедренный треугольник, в котором высота, проведённая к основанию, относится к боковой стороне как 2 : 3, а периметр равен данному отрезку.

196. Даны угол и отрезок. Постройте треугольник ABC, в котором угол A равен данному углу, $AB : AC = 2 : 3$, а отрезок, соединяющий точку A с центром вписанной окружности, равен данному отрезку.

197. Даны угол и отрезок. Постройте треугольник ABC, в котором угол A равен данному углу, сторона BC равна данному отрезку и $AB : AC = 3 : 5$.

Задачи повышенной трудности

Глава 4

198. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через эти точки проведены секущие MP и CD, не пересекающиеся внутри ни одной из окружностей (точки M и C лежат на одной окружности, а точки P и D — на другой). Докажите, что $MC \parallel PD$.

199. Две окружности пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная к первой окружности, пересекающая вторую окружность в точке B, а через точку P — прямая, параллельная прямой AB и пересекающая вторую и первую окружности в точках C и D. Докажите, что $AB = CD$.

200. Две окружности пересекаются в точках M и P. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AM, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

201. Две окружности имеют единственную общую точку. Через неё проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках A и A_1, другую — в точках B и B_1. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

202. Через точку A пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая одну из окружностей в точке B, а другую — в точке C. Докажите, что отрезок BC будет наибольшим тогда, когда он параллелен прямой O_1O_2.

203. Докажите, что из всех треугольников с данными вершинами A и B и данным расстоянием от третьей вершины до прямой AB наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

204. Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника при этой вершине. Проведённые прямые, пересекаясь, образуют новый треугольник. Докажите, что высоты этого треугольника содержат биссектрисы треугольника ABC.

205. Бильярдный стол имеет форму остроугольного треугольника ABC. Шар отражается от борта BC в точке A_1, потом от борта CA в точке B_1, затем от борта AB в точке C_1, после чего вновь попадает в точку A_1 и повторяет маршрут $A_1B_1C_1A_1$. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC.

206. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, для которого эти точки являются основаниями высот. Сколько решений имеет эта задача?

207. Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на окружности, описанной около треугольника AMN.

208. Из вершины B треугольника ABC, в котором $AB \neq BC$, проведены высота BH и биссектриса угла B, пересекающая описанную около треугольника окружность с центром O в точке E. Докажите, что луч BE является биссектрисой угла OBH.

209. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Касательная AE к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает прямую BC в точке E. Докажите, что $AE = DE$.

210. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник. Докажите, что $AD = OD$.

211. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называется вневписанной окружностью этого треугольника. Докажите, что: а) любой треугольник имеет три вневписанные окружности; б) прямая, проходящая через вершину треугольника и точку, в которой вневписанная окружность касается противоположной стороны, разделяет треугольник на два треугольника с равными периметрами; в) точки, в которых вписанная и вневписанная окружности касаются стороны треугольника, равноудалены от середины этой стороны.

212. Постройте треугольник: а) по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой к данной стороне; б) по углу, высоте, проведённой из вершины этого угла, и отрезку, длина которого равна периметру искомого треугольника.

213. Постройте треугольник, если даны описанная окружность и на ней точки H, B и M, через которые проходят прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведённые из одной вершины.

Глава 5

214. Сколько углов, меньших 10°, может иметь выпуклый многоугольник?

215. Пять углов выпуклого многоугольника равны 140° каждый, а остальные углы — острые. Найдите число сторон этого многоугольника.

216. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны. Докажите, что $A_1A_2 - A_4A_5 = A_5A_6 - A_2A_3 = A_3A_4 - A_6A_1$.

217. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 удовлетворяют условиям $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Докажите, что существует выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны, причём $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_5 = a_4$, $A_5A_6 = a_5$, $A_6A_1 = a_6$ (при данной единице измерения отрезков).

218. Докажите, что: а) если в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной точке, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность; б) если в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной точке.

219. Продолжения за точку D сторон AD и CD невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекают стороны BC и AB в точках A_1 и C_1. Докажите, что если в четырёхугольник A_1BC_1D можно вписать окружность, то $AB+CD=AD+BC$, и обратно: если $AB+CD=AD+BC$, то в четырёхугольник A_1BC_1D можно вписать окружность.

220. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Найдите его углы, если $\angle ADP=\frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP=\frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD=BD=CD$.

221. Докажите, что сумма трёх медиан треугольника меньше периметра, но больше трёх четвёртых периметра этого треугольника.

222. Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

223. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих квадратов являются вершинами квадрата.

224. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $KBEP$. Докажите, что треугольник APQ — прямоугольный и равнобедренный.

225. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке, лежащей на стороне CD. Докажите, что $CD=BC+AD$.

226. Отрезок BD — медиана треугольника ABC, $AB=2BD$. Докажите, что луч BC — биссектриса внешнего угла треугольника ABD.

227. Найдите множество середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой, не проходящей через эту точку.

228. Из вершины A треугольника ABC проведены перпендикуляры AH и AK к биссектрисам внешних углов этого треугольника при вершинах B и C. Докажите, что расстояние HK равно половине периметра треугольника ABC.

229. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 соединяют вершины треугольника ABC с внутренними точками противоположных сторон. Докажите, что середины этих отрезков не лежат на одной прямой.

230. Середины трёх высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный.

231. Стороны AO и BO равностороннего треугольника ABO продолжены за точку O на равные друг другу отрезки OC и OD соответственно. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины отрезков OA, OD и BC, — равносторонний.

232. Докажите, что диагонали четырёхугольника равны тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, взаимно перпендикулярны.

233. Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярна к основаниям.

234. Докажите, что в четырёхугольнике, отличном от параллелограмма, три отрезка, два из которых соединяют середины противоположных сторон, а третий — середины диагоналей, имеют общую середину.

235. Вершинами треугольника ABC являются середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Докажите, что центр O пятиугольника и центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, симметричны относительно прямой AC.

236. Докажите, что точки, симметричные центру описанной около треугольника окружности относительно прямых, содержащих средние линии, лежат на окружности Эйлера.

237. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABH, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

238. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

239. Докажите, что середины сторон и основания высот треугольника, углы которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2, являются шестью вершинами правильного семиугольника.

240. Постройте прямоугольник по диагонали и отрезку, длина которого равна периметру прямоугольника.

241. Постройте ромб по стороне и отрезку, равному разности диагоналей.

242. Постройте квадрат по отрезку, равному сумме стороны и диагонали.

243. Постройте трапецию по боковой стороне, диагоналям и углу между ними.

244. Постройте равнобедренную трапецию по основаниям и диагонали.

245. На каждой из сторон квадрата отметили по точке, а сами стороны стёрли. С помощью циркуля и линейки восстановите квадрат.

Глава 6

246. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведён перпендикуляр CD к гипотенузе, а из точки D — перпендикуляры DE и DF к катетам AC и BC. Докажите, что $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$ и $AE^2 + BF^2 + 3CD^2 = AB^2$.

247. Дан треугольник ABC. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $MB^2 + AC^2 = MC^2 + AB^2$.

248. Докажите, что для всех хорд AB данной окружности величина $\frac{AB^2}{AD}$, где AD — расстояние от точки A до прямой, касающейся окружности в точке B, имеет одно и то же значение.

249. Докажите, что если диагонали вписанного четырёхугольника взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов двух противоположных сторон четырёхугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

250. Докажите, что произведение стороны треугольника на высоту, проведённую к ней, не зависит от того, какая из сторон выбрана.

251. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Докажите, что $4AM^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$.

252. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике со сторонами a, b, c, d (последовательно), диагоналями m, n и углом α между ними справедливо равенство $|a^2 + c^2 - b^2 - d^2| = 2mn|\cos \alpha|$.

253. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, R — радиус окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что $AH = 2R|\cos A|$.

254. Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, точка H — ортоцентр этого треугольника, точка M_1 симметрична точке M относительно прямой BC, N — точка пересечения прямой MM_1 и указанной окружности, N_1 — точка, симметричная точке N относительно прямой BC. Докажите, что: а) $MN_1 = AH$; б) $AN \parallel HM_1$.

255. Из точки M, лежащей на описанной около треугольника ABC окружности, проведены прямые, перпендикулярные к AB и BC и пересекающие указанную окружность в точках L и N соответственно. Докажите, что: а) $LN = AC$; б) $CL \parallel AN$.

256. Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, точки M_1, M_2 и M_3 симметричны точке M относительно прямых, содержащих стороны этого треугольника. Докажите, что точки M_1, M_2 и M_3 лежат на прямой, проходящей через ортоцентр треугольника ABC.

257. Докажите, что основания перпендикуляров, проведённых из произвольной точки M окружности, описанной около треугольника с ортоцентром H, к прямым, содержащим стороны этого треугольника, лежат на прямой, проходящей через середину отрезка MH (прямая Симсона).

258. Докажите, что при $\alpha + \beta \leqslant 180°$ имеют место тождества:
а) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
б) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

259. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда сумма квадратов его сторон в 8 раз больше квадрата радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

260. Докажите, что в любом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

261. Точка M лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что один из отрезков MA, MB и MC равен сумме двух других.

262. Углы A, B и C треугольника ABC связаны соотношениями $\angle B = 2\angle A$ и $\angle C = 2\angle B$. Докажите, что $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

263. В треугольнике ABC $(AB \neq AC)$ через середину M стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

264. Две окружности касаются друг друга изнутри в точке M. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке T. Докажите, что луч MT — биссектриса угла AMB.

265. Три окружности попарно касаются друг друга извне в точках A, B и C. Прямая AB пересекает в точке M прямую, проходящую через центры окружностей, касающихся в точке C. Докажите, что отрезок касательной (от точки M до точки касания) к окружности, проходящей через точки A и B, равен MC.

266. Углы треугольника ABC связаны равенством $3\angle A + 2\angle B = 180°$. Докажите, что $AB^2 = BC^2 + AB \cdot AC$.

267. Через точку M биссектрисы угла проведена прямая, отсекающая на его сторонах отрезки, равные a и b. Докажите, что величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора прямой.

268. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O. Докажите, что $AD \cdot BC = AO \cdot OC + BO \cdot OD$.

269. Докажите, что точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой.

270. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки E и F так, что точка E лежит на отрезке AF и $AE = BF$. Прямая, проведённая через точку E параллельно стороне AC, пересекает прямую, проведённую через точку F параллельно стороне BC, в точке K. Докажите, что точка K лежит на медиане треугольника ABC, проведённой к стороне AB.

271. Диагонали BE и CE правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекают диагональ AD в точках F и G соответственно. Докажите, что $FG : AF = AF : AG = AG : AD = \varphi$, где φ — отношение золотого сечения.

272. Из точки M внутренней области острого угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к прямым OA и OB, а из точек P и Q — перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA. Докажите, что $RS \perp OM$.

273. Из середины D основания AC равнобедренного треугольника ABC проведён перпендикуляр DH к стороне BC, точка M — середина отрезка DH. Докажите, что $BM \perp AH$.

274. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ADP = \frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD = BD = CD$. Докажите, что $AB^2 = BP \cdot BD$.

275. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD, CD и BC соответственно в точках M, N и P. Докажите, что отрезок AM является средним геометрическим отрезков MN и MP.

276. Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорда AC второй окружности лежит на касательной к первой, а хорда BD первой окружности — на касательной ко второй. Докажите, что $AB^2 = AD \cdot BC$ и $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

277. Через середину C хорды AB проведены хорды KL и MN, точки K и M лежат по одну сторону от прямой AB. Прямые AB и ML пересекаются в точке P, а прямые AB и KN — в точке Q. Докажите, что $CP = CQ$.

278. Докажите, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

279. Докажите, что длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда: а) прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис; б) расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно среднему геометрическому радиуса вписанной и диаметра описанной окружностей; в) расстояние от точки пересечения продолжения одной из биссектрис с описанной окружностью до стороны, за которую эта биссектриса продолжена, равно радиусу вписанной окружности; г) одна из биссектрис делится центром вписанной окружности в отношении 2 : 1, считая от вершины.

280. Докажите, что если через вершины произвольного треугольника ABC провести лучи AB_1, AC_1, BA_1, BC_1, CA_1, CB_1, делящие каждый из его углов на три равные части так, как показано на рисунке 116, то точки A_1, B_1 и C_1 окажутся вершинами равностороннего треугольника (теорема Морли).

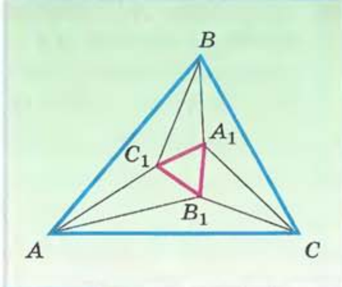


Рис. 116

281. Даны параллельные прямые a и b. На прямой a отмечены точки A, B, C, D (в указанном порядке), на прямой b — точки A_1 и B_1. Используя только линейку (и не используя циркуль), постройте на прямой b такой отрезок C_1D_1, что: а) $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$; б) $AB : CD = C_1D_1 : A_1B_1$.

282. Постройте точку, принадлежащую большему основанию равнобедренной трапеции и отстоящую от данной боковой стороны в n раз дальше, чем от другой ($n = 2, 3, 4$).

283. Точка C лежит на отрезке AB. Постройте точку D прямой AB, не лежащую на отрезке AB, так, чтобы $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$. Всегда ли задача имеет решение?

284. Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме основания и высоты, проведённой к основанию.

285. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведённой из их общей вершины.

286. Постройте треугольник ABC, если даны углы A, C и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH.

287. В данную окружность впишите правильную пятиконечную звезду и найдите в ней все пары отрезков, образующих золотое сечение.

288. Постройте треугольник по трём высотам.

Задачи с практическим содержанием

Глава 4

1. С помощью одного лишь угольника (рис. 117) проведите через данную точку прямую, параллельную данной прямой.

Рис. 117

2. С помощью одного лишь угольника постройте середину данного отрезка.

3. На листе бумаги нарисованы отрезки двух лучей, образующих угол, вершина которого лежит вне листа. С помощью циркуля и линейки постройте ту часть биссектрисы этого угла, которая лежит на листе бумаги.

4. С помощью одной двусторонней линейки (т. е. линейки с двумя параллельными краями) без циркуля постройте центр данной окружности, диаметр которой больше ширины линейки.

5. На большом листе бумаги отмечены точки A и B, расстояние между которыми больше 1 м. С помощью линейки, длина которой равна 20 см, и циркуля, раствор которого не может быть больше 10 см, постройте отрезок AB.

Глава 5

1. Объясните принцип действия чертежного инструмента, позволяющего проводить параллельные прямые (рис. 118).

Рис. 118

2. Объясните, почему стержни, поддерживающие чашки весов, изображённых на рисунке 119, сохраняют вертикальное положение при качании коромысла.

3. Чтобы найти расстояние между недоступными точками A и B, можно поступить так. На произвольной

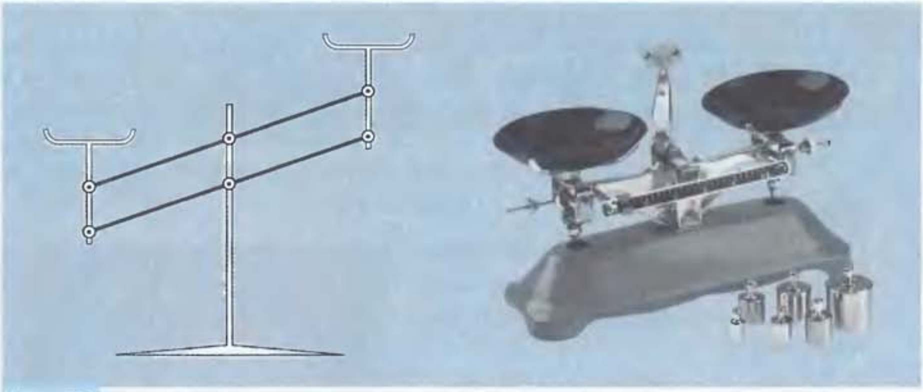


Рис. 119

прямой a найти такие точки C и D, для которых $AC \perp a$, $BD \perp a$, и отметить середину M отрезка CD. Далее найти точки P и Q пересечения прямых AM и BD, BM и AC и измерить отрезок PQ. Его длина будет равна искомому расстоянию. Докажите это.

4. С помощью одной двусторонней линейки (без циркуля) постройте биссектрису данного угла.

5. Четырёхугольный лист бумаги перегнули сначала по одной диагонали, затем по другой. И в том и в другом случае две половины листа полностью совместились. Следует ли из этого, что лист квадратный?

6. Человек ростом 1 м 70 см смотрится в зеркало, высота которого равна 90 см. Может ли он увидеть себя в полный рост?

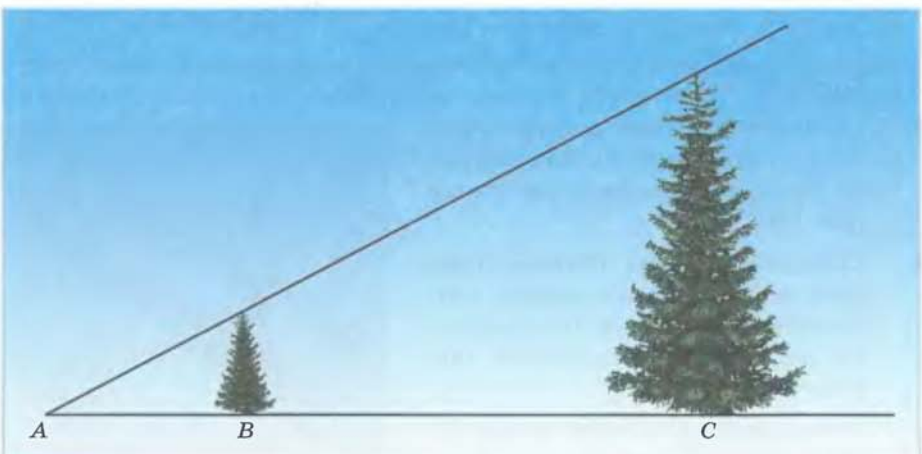


Рис. 120

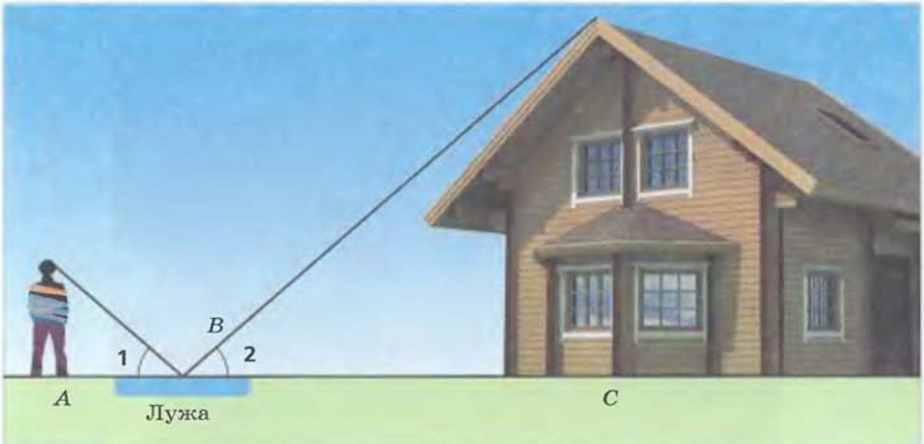


Рис. 121

7. Как следует направить стоящий около борта прямоугольного бильярдного стола шар, чтобы после отражений от трёх остальных бортов он вернулся в исходную точку?

Глава 6

1. У одного берега реки пришвартованы катера A и B, а у другого — катер C. Известно, что $AB = 80$ м, $\angle BAC = 33°38'$ и $\angle ABC = 78°46'$. Найдите ширину реки.

2. В лесу для определения высоты дерева можно воспользоваться растущим поблизости маленьким деревцем. Исходя из рисунка 120, найдите высоту дерева, если высота деревца равна 1,6 м, $AB = 1{,}2$ м и $AC = 5{,}4$ м.

3. Длина тени дерева равна 8,4 м, а длина тени человека, рост которого 1,8 м, равна 2,4 м. Найдите высоту дерева.

4. Для определения высоты дома можно воспользоваться лужей. Исходя из рисунка 121, на котором $\angle 1 = \angle 2$, найдите высоту дома, если расстояние от земли до глаз человека равно 1,7 м, $AB = 85$ см и $BC = 8{,}5$ м.

5. Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B выбрали точку C и измерили отрезок AC, углы BAC и ACB, а затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Исходя из рисунка 122, найдите AB, если $AC = 100$ м, $A_1C_1 = 10$ см, $A_1B_1 = 10{,}7$ см.

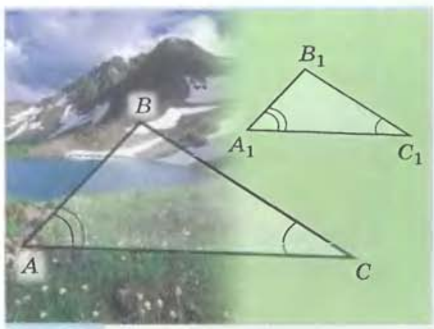


Рис. 122

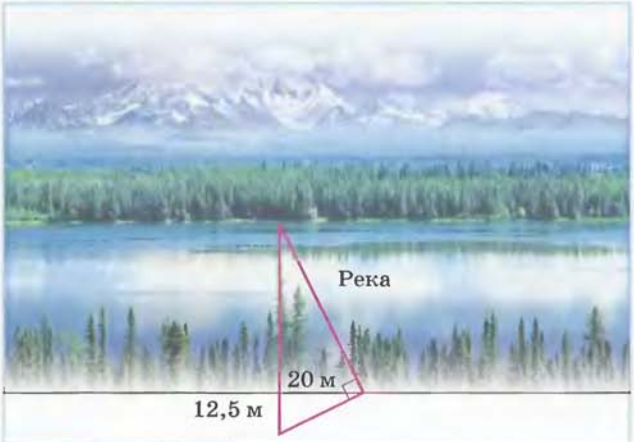


Рис. 123

6. На рисунке 123 показано, как можно определить ширину реки. Исходя из этого рисунка, найдите ширину реки.

7. Две деревни разделены лесом. Как проложить соединяющую их прямолинейную дорогу, используя пункт, из которого видны обе деревни?

8. На расстоянии 2 м 40 см от берега реки растёт камыш, возвышающийся над водой на 1 м 80 см. Когда этот камыш за верхушку подтянули к берегу, он скрылся под водой. Найдите глубину реки в том месте, где растёт камыш.

9. Чему равно расстояние от лодки до маяка, высота которого равна 180 м, в тот момент, когда плывущие в лодке смогли его увидеть? (Радиус земного шара считать равным 6400 км.)

10. Чему равно расстояние от корабля до маяка, высота которого равна 180 м, в тот момент, когда матрос на вершине мачты, находящийся на высоте 60 м над уровнем моря, смог его увидеть? (Радиус земного шара считать равным 6400 км.)

11. На рисунке 124 буквами α и β обозначены углы попадания мяча в ворота, если мяч направляется соответственно из точки A и из точки B прямо против ворот. Какой из углов α и β больше?

12. Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на два равных треугольника, подобных исходному?

13. Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на три равных треугольника, подобных исходному?

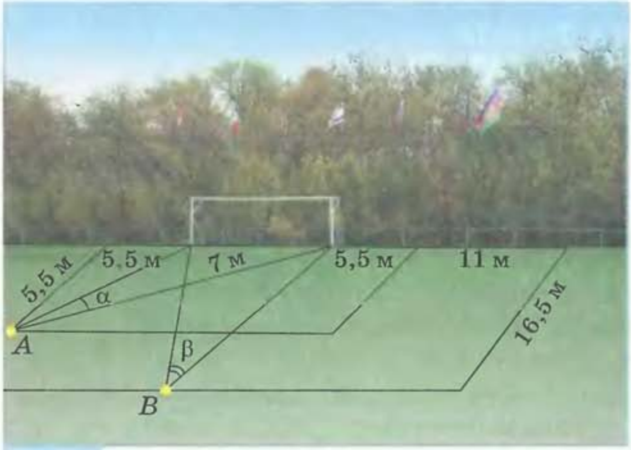


Рис. 124

14. Наблюдатель устанавливает вертикально шест и отходит от него так, чтобы при взгляде на вершину отвесной скалы она была на одной прямой с верхним концом шеста. Вычислите высоту горы, если известны расстояние от шеста до скалы, расстояние от шеста до наблюдателя, высота шеста и расстояние от глаз наблюдателя до земли.

15. **Годичный параллакс звёзд.** В астрономии **годичным параллаксом** звезды называют угол, под которым виден с неё отрезок, соединяющий Землю и Солнце (имеется в виду средняя за год величина такого угла, потому что при вращении Земли вокруг Солнца он меняется). Впервые такой угол удалось измерить немецкому астроному и математику Фридриху Бесселю (1784—1846) в 1838 г. для звезды 61 в созвездии Лебедя, и по его измерениям он оказался равным 0,314″. (Согласно современным измерениям параллакс этой звезды равен 0,292″). Радиус орбиты Земли (т. е. расстояние от Земли до Солнца) астрономы научились измерять очень давно, а если известны этот радиус и углы α и β на рисунке 125, то можно вычислить расстояние от Земли до звезды (отрезки AC и BC на рисунке 125). Выведите формулу, выражающую длины отрезков AC и BC через радиус орбиты Земли и углы α и β.

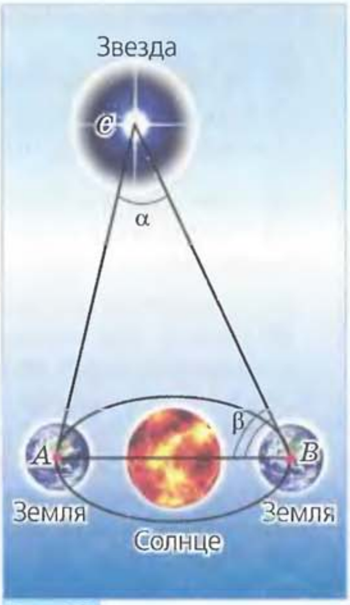


Рис. 125

Проектные задачи

Проектные задачи выполняются с использованием учебно-методического комплекта «Живая математика».

Глава 4

1. а) Научитесь строить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

б) Нарисуйте треугольник ABC, проведите биссектрисы углов B и C и отметьте их точку пересечения.

в) Через точку пересечения биссектрис углов B и C треугольника ABC проведите прямую, параллельную прямой BC, и отметьте точки P и Q, в которых эта прямая пересекает стороны AB и AC.

г) Сравните длину отрезка PQ и сумму длин отрезков BP и CQ. Подвигайте вершины треугольника ABC и убедитесь, что равенство $PQ = BP + CQ$ при этом сохраняется.

2. а) Нарисуйте треугольник, проведите биссектрисы его углов и отметьте точку пересечения биссектрис.

б) Проведите перпендикуляр из точки пересечения биссектрис к одной из сторон.

в) Проведите окружность, вписанную в треугольник.

г) Скройте все вспомогательные объекты, оставив только треугольник и вписанную в него окружность.

3. а) Нарисуйте треугольник и постройте середины его сторон.

б) Проведите серединные перпендикуляры к сторонам и отметьте их точку пересечения.

в) Проведите окружность, описанную около треугольника.

г) Скройте все вспомогательные объекты, оставив только треугольник и описанную около него окружность.

Глава 5

4. а) Отметьте три точки A, B и C, проведите отрезки AB и BC, затем проведите через точку A прямую, параллельную прямой BC, а через точку C прямую, параллельную прямой AB.

б) Отметьте точку D пересечения проведённых прямых и проведите отрезки AD и CD.

в) Скройте прямые AD и CD, оставив только параллелограмм $ABCD$.

5. а) Постройте треугольник, проведите его высоты и отметьте точку пересечения высот.
б) Постройте центр окружности, описанной около треугольника.
в) Проведите отрезок, соединяющий точку пересечения высот и центр окружности, описанной около треугольника, и отметьте середину этого отрезка.
г) Постройте окружность Эйлера.
д) Скройте все вспомогательные объекты, оставив только треугольник и окружность Эйлера.
е) Нарисуйте на том же чертеже окружность, вписанную в треугольник.
ж) Двигая вершины треугольника, сформулируйте гипотезу о взаимном расположении окружности Эйлера и окружности, вписанной в треугольник.

Глава 6

6. а) Проведите окружность с центром O и отметьте на ней точки A, B и C.
б) Вычислите $\frac{AB}{CO \cdot \sin \angle ACB}$.
в) Двигая вершины треугольника, убедитесь, что вычисленная величина остаётся постоянной.

7. а) Проведите две пересекающиеся окружности и отметьте точки A и B, в которых они пересекаются.
б) Через точку A проведите касательные к этим окружностям и отметьте точки C и D, в которых они пересекают окружности.
в) Измерьте углы ABC и ABD.
г) Двигая окружности, сформулируйте гипотезу об углах ABC и ABD.

Исследовательские задачи

1. Придумайте такое условие параллельности двух данных прямых, которое является: а) необходимым, но не достаточным; б) достаточным, но не необходимым.

2. Исследуйте, при каком условии задача о построении треугольника: а) по трём медианам; б) по трём высотам имеет решение.

3. Постройте треугольник по углу A и сторонам AC и BC и исследуйте, при каком условии задача: а) имеет решение; б) имеет единственное решение; в) имеет два решения; г) не имеет решений.

4. Исследуйте, сколько различных точек может быть среди тех 9 точек, через которые проходит окружность Эйлера.

5. Выведите формулу стороны равностороннего треугольника в теореме Морли (см. задачу 280 на с. 132).

Темы рефератов и докладов

1. Вневписанные окружности.
2. Аксиома параллельных прямых и эквивалентные ей утверждения.
3. Чем геометрия Лобачевского отличается от геометрии Евклида.
4. Биография Н. И. Лобачевского.
5. Симметрия и орнаменты.
6. Симметрия в природе и в архитектуре.
7. Прямая и окружность Эйлера.
8. Признаки равенства треугольника по: а) трём медианам; б) трём высотам; в) трём биссектрисам.
9. Золотое сечение в природе, архитектуре и живописи.
10. Нестандартные признаки подобия треугольников.
11. Построения одним циркулем.
12. Прямая и обратная теоремы, необходимость и достаточность.
13. Методы решения задач на построения (метод ГМТ, метод подобия).
14. Теорема Чевы и следствия из неё: теоремы о точках пересечения медиан, биссектрис, высот.

Об аксиомах и основных понятиях планиметрии*

Основные понятия. Ранее (п. 45) мы говорили о том, что не все утверждения можно доказать. Некоторые из них, самые очевидные, принимаются в качестве исходных положений (аксиом), а затем уже на их основе доказываются теоремы и вообще строится вся геометрия. В связи с этим возникает вопрос: можно ли дать определения всем понятиям, которыми мы пользуемся в геометрии? Например, отрезком AB мы назвали геометрическую фигуру, состоящую из двух данных точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между точками A и B. Таким образом, отрезок определяется с помощью трёх понятий: «точка», «прямая», «лежать между». А что такое точка? Можно, конечно, сказать: «Точка — это то, что не имеет размеров». Но тогда сразу возникает вопрос: а что такое размеры? И если даже мы сумеем дать определение этому понятию, то в нём обязательно будут использоваться другие понятия, которые, в свою очередь, также нуждаются в определениях. Ясно, что эта цепь должна иметь начало (подобно тому как цепь вытекающих друг из друга теорем имеет своим началом аксиомы). Таким началом являются понятия, определения которым не даются, — они называются основными понятиями, а их свойства описываются аксиомами. Можно сказать тем самым, что основные понятия как бы определяются аксиомами.

Основные понятия и аксиомы образуют фундамент для построения геометрии: опираясь на них, мы даём определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом строим геометрию. Совокупность основных понятий и аксиом планиметрии называют системой аксиом планиметрии.

Система аксиом планиметрии. В нашем курсе основных понятий четыре: точка, прямая, наложение и понятие лежать между для трёх точек одной прямой. Их свойства описываются пятнадцатью аксиомами.

1. Каждой прямой принадлежат[1] по крайней мере две точки.

2. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

[1] Такие понятия, как «принадлежать», «множество», «отображение» и т. д., относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики, поэтому мы не относим их к числу основных понятий геометрии.

3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

4. Из трёх точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Подчеркнём, что предложение «точка B лежит между точками A и C» подразумевает, что A, B, C — различные точки прямой и точка B лежит также между C и A. Иногда вместо этих слов мы будем говорить: «точки A и B лежат по одну сторону от точки C», «точки B и C лежат по одну сторону от точки A» или «точки A и C лежат по разные стороны от точки B».

Если каждой точке M плоскости сопоставлена некоторая точка M_1, и при этом каждая точка M_1 оказывается сопоставленной некоторой точке M, то говорят, что задано <u>отображение плоскости на себя</u>.

5. Любое наложение является отображением плоскости на себя.

Если существует наложение, при котором фигура Φ (под фигурой мы понимаем произвольное множество точек) отображается на фигуру Φ_1, то будем говорить, что <u>фигуру</u> Φ <u>можно совместить наложением с фигурой</u> Φ_1 или что <u>фигура</u> Φ <u>равна фигуре</u> Φ_1.

6. Любая фигура равна самой себе.

7. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3 и фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2.

В качестве следствия из аксиом 6 и 7 получаем:

- если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, то фигура Φ_2 равна фигуре Φ_1.

В самом деле, согласно аксиоме 7 из равенств $\Phi_2 = \Phi_2$ (аксиома 6) и $\Phi_1 = \Phi_2$ следует, что $\Phi_2 = \Phi_1$.

8. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

Если отрезок AB и прямая a не имеют общих точек, лежащих между A и B, то будем говорить, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекает прямую a (или, что то же самое, прямая a пересекает отрезок AB), т. е. они имеют общую точку, лежащую между A и B, то будем говорить, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

9. Каждая прямая a разделяет множество точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.

Прямая a называется границей каждой из указанных полуплоскостей; её точки не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.

Аксиома 9 позволяет доказать следующее утверждение:

- каждая точка O прямой a разделяет множество её точек, отличных от O, на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O; сама же точка O не принадлежит ни одному из указанных лучей.

Рассмотрим прямую a, на которой отмечена точка O, и произвольную точку M, не лежащую на прямой a (аксиома 2).

Через точки O и M проходит прямая (аксиома 3) — обозначим её буквой b (рис. 126, *а*). Прямая b разделяет множество точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на две полуплоскости (аксиома 9), и тем самым все точки прямой a (за исключением точки O) разделяются на две части: одна часть точек прямой a лежит в одной полуплоскости, а другая — в другой.

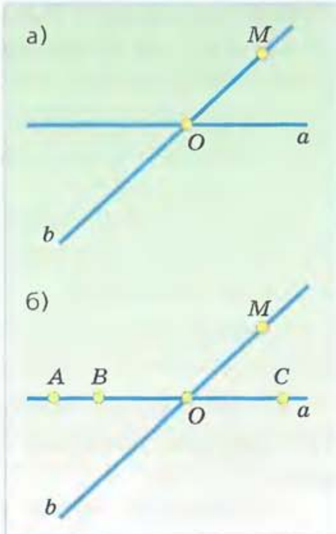


Рис. 126

Если точки A и B принадлежат одной из этих частей прямой a, то они лежат в одной полуплоскости с границей b, а это означает, что отрезок AB не имеет общих точек с прямой b и, следовательно, не содержит точку O (рис. 126, *б*). Иными словами, точки A и B лежат по одну сторону от точки O.

Если же точки A и C принадлежат разным частям прямой a, то они лежат в разных полуплоскостях с границей b, т. е. отрезок AC пересекается с прямой в точке O, лежащей между A и C, а это означает, что точки A и C лежат по разные стороны от точки O (см. рис. 126, *б*). Утверждение доказано.

Из наших рассуждений следует также, что

- если точка O лежит на прямой b, а точка A не лежит на этой прямой, то все точки луча OA лежат в одной полуплоскости с границей b (см. рис. 126, *б*).

10. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Иными словами, если даны какой-нибудь луч h с началом O и какой-нибудь отрезок AB, то на луче h существует, и притом только одна, такая точка M, что отрезок OM равен отрезку AB.

Из сформулированных аксиом можно получить следствие:

- на каждом луче существует хотя бы одна точка.

В самом деле, рассмотрим луч h прямой a с началом O. На прямой a есть хотя бы одна точка A, отличная от O (аксиома 1). Если точка A лежит на луче h, то существование хотя бы одной точки на этом луче доказано. Если же точка A не лежит на луче h, то поступим так: на луче h от точки O отложим отрезок OB, равный OA (аксиома 10). Тогда точка B будет лежать на луче h, что и доказывает утверждение.

Из этого утверждения следует, что

- на каждом луче есть бесконечное множество точек (докажите это самостоятельно).

Следующие три аксиомы связаны с понятием угла — фигуры, состоящей из точки и двух исходящих из неё лучей.

11. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Это означает, что если даны какая-то полуплоскость с границей OA и какой-то неразвёрнутый угол hk, то в данной полуплоскости существует, и притом только один, такой луч OB, что угол AOB равен углу hk.

12. Любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами: 1) так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1; 2) так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.

13. Для любых двух отрезков существует прямоугольник (т. е. выпуклый четырёхугольник, все углы которого прямые), две смежные стороны которого равны этим отрезкам.

Систему аксиом планиметрии завершают две аксиомы, связанные со сравнением отрезков.

14. Для любого множества точек отрезка, содержащего не менее двух точек, существует наименьший отрезок, содержащий все точки данного множества.

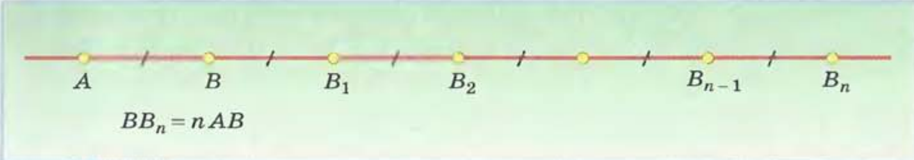


Рис. 127

Иными словами, существует такой отрезок AB, что все точки данного множества ему принадлежат, а для любого отрезка CD, меньшего AB (процедура сравнения отрезков описана в учебнике «Геометрия, 7»), в данном множестве найдётся хотя бы одна точка, не принадлежащая отрезку CD.

Рассмотрим произвольный отрезок AB. На продолжении луча BA (т. е. на луче с началом B прямой AB, отличном от луча AB) отложим отрезок $BB_1 = AB$, на продолжении луча B_1A отложим отрезок $B_1B_2 = AB$, ..., на продолжении луча $B_{n-1}A$ — отрезок $B_{n-1}B_n = AB$ (рис. 127). Будем говорить, что отрезок BB_n в n раз больше отрезка AB, и записывать это так: $BB_n = nAB$.

15. Для любых двух отрезков AB и CD существует такое натуральное число n, что $nAB > CD$.

Эту аксиому связывают с именем древнегреческого учёного Архимеда (ок. 287—212 до н. э.). Отметим, что аксиома Архимеда позволяет осуществить процесс измерения отрезков, описанный в пункте 66.

Как мы уже видели, опираясь на аксиомы, можно доказывать утверждения, не привлекая наглядные представления о свойствах геометрических фигур.

Приведём ещё несколько примеров. При этом рисунки, если и будут использоваться, то лишь для облегчения восприятия проводимых рассуждений, а не как средство доказательства.

Задача 1

Доказать, что если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит через точку внутренней области этого угла, то все точки луча лежат во внутренней области угла.

Решение

Рассмотрим луч OM, проходящий через точку M внутренней области угла AOB. Напомним, что внутренняя область угла AOB — это общая часть двух полуплоскостей — полуплоскости с границей OA, содержащей точку B, и полуплоскости с границей OB, содержащей точку A.

Поскольку точка M принадлежит полуплоскости с границей OA, содержащей точку B, то, как отмечалось в этом пункте, все точки луча OM также принадлежат этой полуплоскости. По той же причине все точки луча OM принадлежат полуплоскости с границей OB, содержащей точку A. Таким образом, все точки луча OM принадлежат общей части указанных полуплоскостей, т. е. принадлежат внутренней области угла AOB, что и требовалось доказать. ▲

Задача 2

Доказать, что если прямая a пересекает сторону AB треугольника ABC и не проходит через вершину этого треугольника, то она пересекает либо сторону BC, либо сторону AC.

Решение

Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости (аксиома 9), причём точки A и B лежат в разных полуплоскостях. Если точка C лежит в той же полуплоскости, что и точка A, то точки B и C лежат в разных полуплоскостях, и тогда прямая a пересекает отрезок BC и не пересекает отрезок AC.

Аналогично, если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то прямая a пересекает отрезок AC и не пересекает отрезок BC. Утверждение доказано. ▲

Задача 3

Доказать, что если точка M лежит во внутренней области неразвёрнутого угла AOB, то луч OM пересекает отрезок AB.

Решение

Рассмотрим луч OC, являющийся продолжением луча OA, и луч OD, являющийся продолжением луча OM (рис. 128). Прямая DM пересекает сторону AC треугольника ABC в точке O и не проходит через его вершину. Следовательно, она пересекает либо сторону AB, либо сторону BC (см. задачу 2). Докажем, что она пересекает сторону AB, причём точка пересечения лежит на луче OM. Тем самым утверждение будет доказано.

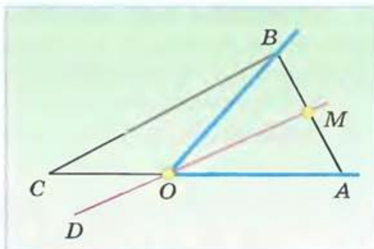


Рис. 128

Так как точки M и C лежат в разных полуплоскостях с границей OB, то лучи OM и BC также лежат в разных полуплоскостях с границей OB, и поэтому луч OM не пересекается с отрезком BC. Аналогично, луч OD не пересекается с отрезками BC и AB. Таким образом, прямая DM не пересекается с отрезком BC, а пересекается с отрезком AB и точка пересечения лежит на луче OM, что и требовалось доказать. ▲

Задача 4

Доказать, что диагонали четырёхугольника пересекаются тогда и только тогда, когда этот четырёхугольник выпуклый.

Решение

Докажем сначала, что если диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в некоторой точке O, то этот четырёхугольник выпуклый, т. е. лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

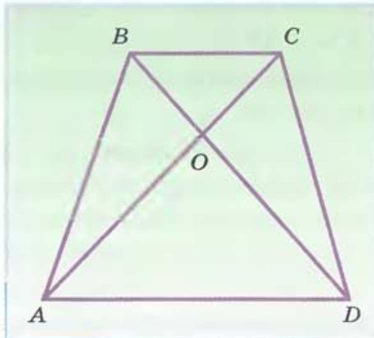


Рис. 129

Рассмотрим, например, сторону AB (для остальных сторон доказательство аналогичное). Точки C и D лежат соответственно на лучах AO и BO (рис. 129), поэтому они лежат в одной полуплоскости с границей AB (в той, в которой лежит точка O). Отсюда следует, что и весь четырёхугольник $ABCD$ (за исключением, разумеется, стороны AB) лежит в этой полуплоскости, т. е. лежит по одну сторону от прямой AB, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются. Точка C лежит во внутренней области угла BAD (объясните почему). Следовательно, луч AC пересекает отрезок BD в некоторой точке O (задача 3). По аналогичной причине луч DB пересекает отрезок AC. Ясно, что точкой их пересечения является та же самая точка O. Итак, точка O — общая точка отрезков AC и BD, т. е. диагонали AC и BD пересекаются в точке O. ▲

Из доказанного утверждения следует, что

- диагонали невыпуклого четырёхугольника не пересекаются (иначе он был бы выпуклым).

Задача 5

Доказать, что в любом четырёхугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

Решение

Если четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то, как было доказано, его диагонали AC и BD пересекаются (см. рис. 129) и, следовательно, отрезок AC пересекает прямую BD. Это и означает, что противоположные вершины A и C лежат по разные стороны от прямой BD. Аналогично, противоположные вершины B и D лежат по разные стороны от прямой AC.

Если же четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый, то найдётся прямая, содержащая сторону четырёхугольника и пересекающая противоположную сторону. Пусть, например, прямая AB пересекает сторону CD в точке M. Тогда точка M не лежит на отрезке AB (в противном случае пересекались бы стороны AB и CD), поэтому возможны только два случая:

1. Точка B лежит на отрезке AM (рис. 130, *а*). В этом случае точки A и M лежат по разные стороны от прямой BD, а так как точка C лежит на луче DM, то она лежит по ту же сторону от прямой BD, что и точка M. Итак, вершина A лежит по одну сторону от прямой BD, а противоположная вершина C — по другую сторону от этой прямой. Следовательно, противоположные вершины A и C лежат по разные стороны от прямой BD.

2. Точка A лежит на отрезке BM (рис. 130, *б*). В этом случае, так же как и в случае 1, можно доказать (сделайте это самостоятельно), что противоположные вершины B и D лежат по разные стороны от прямой AC. ▲

В любом четырёхугольнике имеется по крайней мере одна диагональ, которая разделяет его на два треугольника. В выпуклом четырёхугольнике этим свойством обладают обе диагонали (см. рис. 129), а в невыпуклом — только одна из диагоналей (см. рис. 130).

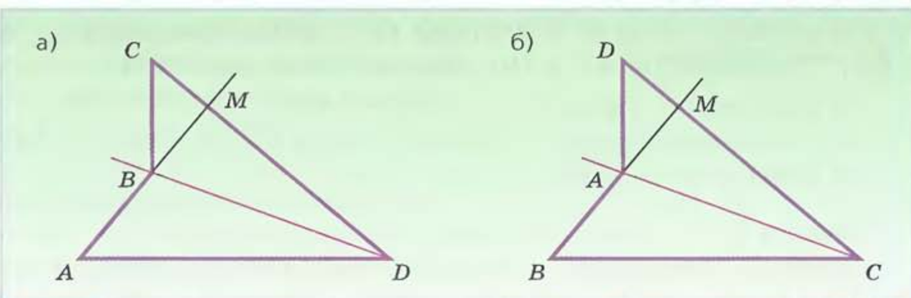


Рис. 130

Замечание 1. При доказательстве некоторых утверждений (например, теоремы о перпендикуляре к прямой и теоремы о противоположных сторонах прямоугольника) мы использовали термин «перегибание плоскости по прямой». При этом мы исходили из наглядных представлений о перегибании плоскости рисунка. С точки зрения аксиом перегибание плоскости по прямой представляет собой наложение, которое определяется следующим образом. Рассмотрим произвольную прямую a. На ней есть по крайней мере две точки (аксиома 1) — обозначим их буквами A и B. Кроме того, существует по крайней мере одна точка, не лежащая на прямой a (аксиома 2) — обозначим её буквой C. Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости (аксиома 9). В ту из них, которая не содержит точки C (рис. 131), отложим от луча AB угол BAD, равный углу BAC (аксиома 11). Согласно аксиоме 12 существует такое наложение, при котором луч AB накладывается на луч AB (т. е. луч AB остается на месте), а луч AC накладывается на луч AD. Это наложение и называется перегибанием плоскости по прямой a. Оно вполне соответствует нашим наглядным представлениям о перегибании плоскости рисунка.

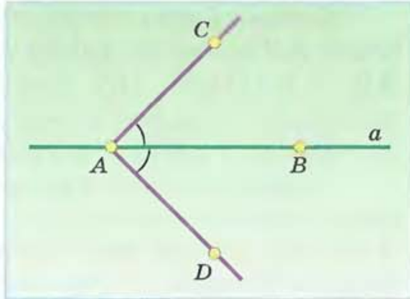


Рис. 131

Отметим, что похожая идея использовалась при доказательстве трёх теорем о равнобедренном треугольнике. Попытайтесь разобраться самостоятельно, на каких аксиомах была основана эта идея.

Замечание 2. При доказательстве ряда теорем (например, теоремы о противоположных сторонах прямоугольника) мы исходили из того, что любой отрезок имеет середину, а любой угол — биссектрису. Докажем эти утверждения. Начнём со второго.

Рассмотрим произвольный неразвёрнутый угол с вершиной O (существование биссектрисы развёрнутого угла вытекает, например, из теоремы о перпендикуляре к прямой) и на его сторонах отложим равные отрезки OA и OB. Из точки O проведём перпендикуляр OH к прямой AB. Отрезок OH, будучи высотой равнобедренного треугольника OAB, является его биссектрисой. Следовательно, луч OH — биссектриса данного угла.

Рассмотрим теперь произвольный отрезок AB и докажем, что он имеет середину.

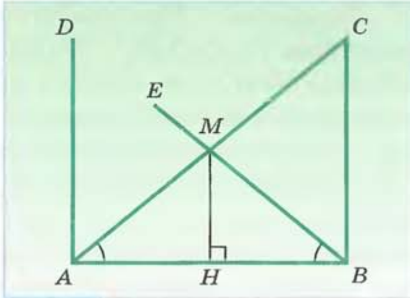


Рис. 132

В одну из полуплоскостей с границей AB отложим прямые углы ABC и BAD (рис. 132). Поскольку точка C лежит во внутренней области угла BAD, то $\angle BAC < \angle BAD = 90°$.

Отложим от луча BA в рассматриваемую полуплоскость угол ABE, равный углу BAC. Так как $\angle ABE = \angle BAC < 90°$, то точка E лежит во внутренней области угла ABC, поэтому (см. задачу 3) луч BE пересекает отрезок AC в некоторой точке M.

Из точки M проведём перпендикуляр MH к прямой AB. Точка H — середина отрезка AB. В самом деле, углы A и B треугольника AMB равны, поэтому этот треугольник равнобедренный. Отрезок MH — его высота и, следовательно, медиана. Это и означает, что точка H — середина отрезка AB. Утверждение доказано.

О числах. Аксиомы геометрии являются основой одного из способов введения понятия вещественного числа и позволяют доказать утверждения о правилах действий с вещественными числами. Интересующиеся могут прочитать об этом в книге [3]. Здесь же мы опишем лишь общую идею приведённых там рассуждений.

Возьмём какой-нибудь луч OE и назовём каждую его точку A положительным вещественным числом. Для различных чисел A и B введём правило сравнения: $A < B$, если $OA < OB$. Далее введём сумму $A + B$ так: на продолжении луча AO отложим отрезок AC, равный OB, и скажем, что $C = A + B$. Чтобы ввести произведение $A \cdot B$, поступим следующим образом. Пользуясь аксиомой 15, измерим отрезок OA с помощью отрезка OE (см. п. 66), т. е. выразим длину отрезка OA при единице измерения OE конечной или бесконечной десятичной дробью $a = n{,}a_1a_2...$, которую назовём десятичной записью числа A. В свою очередь, из аксиомы 14 следует, что для любой точки M луча OE и любой десятичной дроби x (если только она не является периодической дробью, период которой состоит из одной цифры 9) на луче OE существует единственная точка X, для которой длина отрезка OX при единице измерения OE выражается дробью x. Возьмём теперь произвольные числа (т. е. точки) A и B с десятичными записями a и b, построим отрезок OC, длина которого при единице измерения OA равна b, и назовём точку C произведением $A \cdot B$. Для завершения построения вещественных чисел осталось назвать точку O нулём, точки продолжения луча OE — отрицательными вещественными числами, а затем доопределить операции сравнения, сложения и умножения на всю прямую OE так, как это делалось в курсе алгебры.

О взаимном расположении прямой и окружности. При рассмотрении взаимного расположения прямой и окружности мы в некоторых случаях опирались на наглядные представления о свойствах окружности. Теперь мы можем восполнить этот пробел.

Рассмотрим окружность с центром O радиуса r и прямую p, не проходящую через точку O. Проведём из точки O перпендикуляр OH к прямой p (рис. 133) и обозначим длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от точки O до прямой p, буквой d. Мы помним, что если $d > r$, то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 133, *а*), а если $d = r$, то прямая и окружность имеют только одну общую точку (рис. 133, *б*). Доказательства этих утверждений были приведены в учебнике «Геометрия, 7». В случае же $d < r$ требуются более аккуратные рассуждения. Проведём их.

Поскольку $OH = d < r$, то точка H лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью. Отметим на прямой p точку D, для которой $DH = r$ (рис. 133, *в*). Гипотенуза OD прямоугольного треугольника DOH больше катета DH, поэтому $OD > r$, а значит, точка D лежит вне круга, ограниченного данной окружностью. Таким образом, один конец отрезка DH (точка H) лежит внутри указанного круга, а другой (точка D) — вне этого круга.

Рассмотрим множество всех точек M отрезка HD, для которых $OM < r$. Согласно аксиоме 14 существует наименьший отрезок HA, содержащий все указанные точки. Докажем, что $OA = r$.

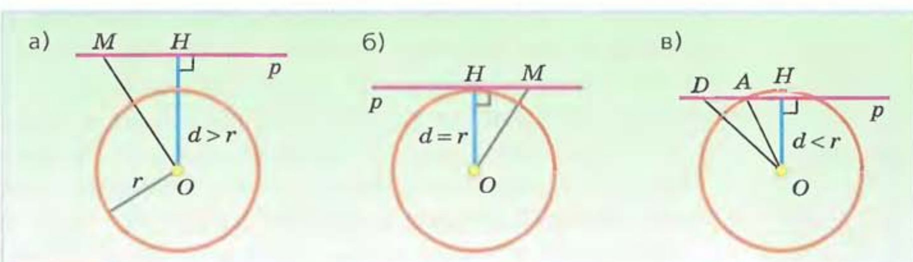


Рис. 133

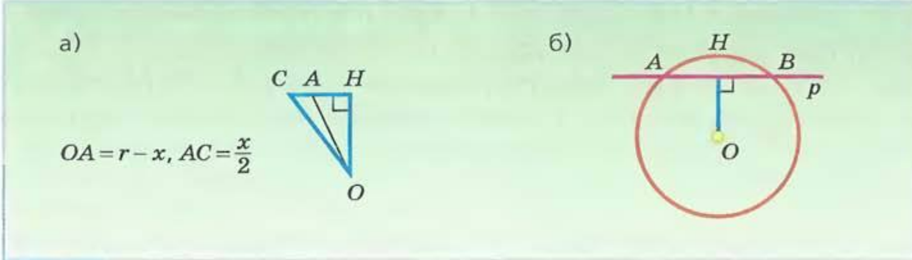


Рис. 134

Допустим, что $OA < r$, т. е. $OA = r - x$, где $x > 0$. Отложим на луче HA отрезок $HC = HA + \frac{x}{2}$ и воспользуемся неравенством треугольника применительно к треугольнику OAC (рис. 134, *а*):

$$OC < OA + AC = OA + \frac{x}{2} = r - x + \frac{x}{2} = r - \frac{x}{2} < r.$$

Следовательно, точка C должна лежать на отрезке HA, но по построению она лежит вне этого отрезка. Полученное противоречие означает, что $OA \geqslant r$.

Если предположить, что $OA > r$, то путём аналогичных рассуждений (проведите их самостоятельно) придём к противоречию с предположением о том, что HA — наименьший отрезок, содержащий все точки M отрезка HD, для которых $OM < r$. Следовательно, $OA = r$, т. е. точка A является общей точкой прямой p и окружности. Теперь нетрудно доказать (см. учебник «Геометрия, 7»), что в рассматриваемом случае прямая p и данная окружность имеют ровно две общие точки (точки A и B на рисунке 134, *б*).

Историческая справка

Аксиомы геометрии, «Начала» Евклида и геометрия Лобачевского. Основные принципы аксиоматического построения науки впервые отчётливо сформулировал Аристотель, развивая учения Пифагора и Платона. Аристотель отмечал, что при доказательстве того или иного утверждения мы опираемся на ранее установленные факты. Поэтому те положения, с которых мы начинаем построение науки, не могут быть логически доказаны — их следует принять в качестве аксиом. (Слово «аксиома» происходит от греческого ἄξιος — достойный.)

Воплощением идей Аристотеля явился знаменитый труд Евклида «Начала». В нём сформулировано сравнительно небольшое количество аксиом и постулатов, из которых выведены почти все известные в то время теоремы. Аристотель (а следуя ему, и Евклид) различал аксиомы (истины, общие для всех наук) и постулаты (истины, свойственные определённой науке). Впоследствии это различие почти утратилось, и сейчас то, что Евклид называл постулатами, обычно тоже называют аксиомами.

Евклид нигде не говорит о бесконечных прямых, а говорит только об отрезках, хотя и использует при этом слово «прямая». Он отмечает, что отрезок можно многократно продолжать, получая при этом каждый раз новый отрезок (но не всю прямую). Знаменитый пятый постулат также использует возможность продолжить отрезки: «Если секущая пересекает две прямые так, что сумма односторонних углов меньше 180°, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма односторонних углов меньше 180°». (Здесь под словом «прямая», конечно, подразумевается отрезок, потому и говорится о продолжении прямой.)


Аристотель

Пятый постулат из «Начал» Евклида сыграл важную роль в развитии геометрии. Его формулировка гораздо сложнее формулировок остальных постулатов и аксиом, поэтому многие математики, начиная с древних времён, пытались доказать пятый постулат, т. е. вывести его как теорему из остальных аксиом Евклида. Но все эти попытки оказались неудачными: в предлагаемых доказательствах либо обнаруживались ошибки, либо пятый постулат неявно заменялся другой эквивалентной ему аксиомой, например:

- множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от прямой и равноудалённых от неё, есть прямая, параллельная данной (Прокл, около 410—485);
- две сближающиеся прямые не могут начать расходиться (Омар Хайям, около 1048 — после 1122);
- существует треугольник, подобный, но не равный другому треугольнику (Д. Саккери, 1667—1733);
- существует хотя бы один прямоугольник (А. К. Клеро, 1713—1765);
- существует хотя бы один треугольник, у которого сумма углов не меньше 180° (А. М. Лежандр, 1752—1833).

Ответ на вопрос о возможности доказательства пятого постулата был получен лишь в XIX в. Огромную роль в решении этой проблемы сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Вся сознательная жизнь Н. И. Лобачевского связана с Казанским университетом, где он сначала учился, затем (в 1816 г.) стал профессором, а с 1827 г. в течение 20 лет был ректором. Он, как и многие другие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида методом от противного. Не используя пятый постулат, можно доказать, что через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, не пересекающую данную. Из пятого постулата можно вывести, что такая прямая только одна. Лобачевский же предположил, что таких прямых можно провести несколько, и, исходя из этого, пытался получить утверждение, противоречащее другим аксиомам или выведенным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что предположение неверно, а потому через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную. Таким образом, пятый постулат был бы доказан.

Лобачевский

Но Лобачевский не получил утверждений, противоречащих другим аксиомам. Более того, он понял, что пятый постулат не следует из других аксиом Евклида, а из полученных им утверждений складывается стройная и глубокая теория. Из этого Лобачевский сделал фундаментальный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. Впоследствии эта геометрия получила развитие в трудах Бельтрами (1835—1900), Пуанкаре (1854—1912) и Клейна (1849—1925), а так как доказанные Лобачевским утверждения составляют важнейшую часть этой геометрии, её стали называть геометрией Лобачевского [14]. Она во многом отличается от евклидовой геометрии, которая изучается в школе. Так, в геометрии Лобачевского нет подобных, но не равных друг другу треугольников, нет ни одного прямоугольника, а сумма углов любого треугольника меньше 180°. Отметим, что о возможности существования такой геометрии писал ещё Аристотель [2].

Сообщение об открытии новой геометрии Лобачевский сделал в феврале 1826 г. на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета. Независимо от Лобачевского к аналогичному открытию пришёл венгерский математик Я. Бойяи (1802—1860), но он опубликовал свои результаты лишь в 1832 г. В рукописях великого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855) содержатся идеи, близкие к идеям Лобачевского и Бойяи, но он не решился опубликовать их, опасаясь быть непонятым.


Гаусс

Открытие Лобачевского явилось крупнейшим событием в истории математики, во многом предопределившим развитие всей науки. До Лобачевского евклидова геометрия считалась единственно возможным учением о пространстве. Открытие же новой геометрии поставило вопрос об экспериментальной проверке того, какова именно геометрия реального пространства. Современная наука установила, что евклидова геометрия лишь приближённо, хотя и с большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах геометрия реального пространства заметно отличается от евклидовой. В настоящее время геометрия Лобачевского широко используется не только в математике, но и в физике, химии, биологии.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к целому ряду замечательных открытий в геометрии. В частности, великий немецкий математик Б. Риман (1826—1866) открыл ещё одну новую геометрию, ныне называемую римановой геометрией, которая обобщает как геометрию Евклида, так и геометрию Лобачевского. Именно эта геометрия послужила фундаментом для построения


Риман

Эйнштейн

общей теории относительности, созданной в 1916 г. великим физиком А. Эйнштейном (1879—1955).

Система аксиом Евклида и структура его изложения были во многих отношениях совершенны и долго оставались непревзойдёнными. Но эта система аксиом была неполной: при доказательствах Евклид пользовался не только своими аксиомами и постулатами, но и некоторыми другими утверждениями, не перечисленными среди аксиом. Это начинается уже с предложения 1 его труда «Начала», в котором строится равносторонний треугольник с заданной стороной AB. Евклид сначала строит окружность радиуса AB с центром A и окружность радиуса BA с центром B (возможность таких построений оговорена постулатом 3). Затем он рассматривает точку пересечения этих окружностей. Но из аксиом и постулатов Евклида не следует, что эти окружности пересекаются.

Гильберт

Вопрос о полноте системы аксиом очень сложный. Труден также и вопрос о независимости аксиом друг от друга (может оказаться, что какая-то аксиома лишняя: её можно вывести из других аксиом). Со всеми этими вопросами детально разобрался великий немецкий математик Д. Гильберт (1862—1943) и написал об этом книгу «Основания геометрии» [6].

Теория пропорций. Теория пропорциональности отрезков была разработана древнегреческим математиком Евдоксом Книдским (IV в. до н. э.). Она подробно изложена в V книге «Начал» Евклида. Эта теория довольно сложная. Дело в том, что у древнегреческих математиков не было понятия действительного числа; они рассматривали только натуральные числа и уже в более позднее время изредка использовали положительные рациональные числа. Поэтому они не могли отождествить длину отрезка с числом. В теории пропорциональности Евдокса фактически обосновываются свойства действительных чисел, и именно поэтому она такая сложная.

Тригонометрия. Тригонометрия была разработана Гиппархом (ок. 150 г. до н. э.), Менелаем и Птолемеем (ок. 150 г. н. э.) в Александрии для нужд астрономии. Александрийские астрономы в своих вычислениях использовали не синус и косинус, а хорды окружности. Но эти понятия тесно связаны друг с другом: если центральный угол величиной 2α опирается на хорду длины d окружности радиуса R, то $\sin\alpha = d/2R$.

При этом использовалось сохранившееся до нашего времени деление окружности на 360 равных частей, которое было введено около 150 г. до н. э. Гипсиклом из Александрии. В делении окружности именно на 360 частей сказалось влияние вавилонских математиков, потому что в их способе записи чисел число 60 играло такую же роль, как у нас число 10; на таком делении основано измерение углов в градусах.

Региомонтан

От хорд к синусам перешли индийские астрономы в начале V в. н. э. Само название «синус» восходит к этим учёным. Они использовали термин «джива» — хорда, тетива лука. В арабских книгах его переделали в слово «джиба», которое не имело обиходного смысла, а потом заменили на настоящее арабское слово «джайб» — пазуха, вырез платья, выпуклость. При переводах арабских книг на латынь стали применять слово sinus — буквальный перевод слова «джайб». Арабские математики внесли большой вклад в развитие тригонометрии. В частности, Абу-ль-Вафа (940—998) ввёл в рассмотрение тангенс угла и составил очень подробную таблицу синусов и тангенсов, а Аль-Бируни (973—1050) доказал теорему синусов.

Аль-Бируни

Теорема, близкая к теореме косинусов, доказана в «Началах» Евклида. Он рассматривал два случая: угол A тупой и угол A острый. Для тупого угла A теорема формулируется так. Пусть BH — высота треугольника ABC. Тогда $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$ (рис. 135). Если в этом равенстве заменить AH на $AB \cdot \cos\angle BAH = AB \cdot (-\cos A)$, то мы получим теорему косинусов. Но такой замены Евклид сделать не мог, потому что в его книге синусов и косинусов вообще нет. Теорему косинусов в знакомом нам виде доказал немецкий математик Иоганн Мюллер (1436—1476), которого называли на латинский манер Региомонтан. (Он родился в маленьком городке Кёнигсберге в Баварии. В переводе на русский язык название этого города означает «королевская гора», а если перевести на латынь, то получится Regio monte.)

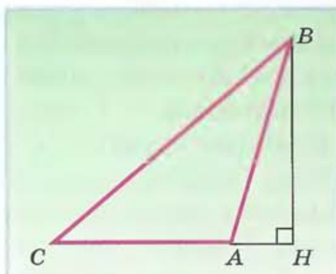


Рис. 135

Теорема Пифагора. Для современников Пифагор был прежде всего религиозным пророком. Он создал мистическое религиозное учение, которое отличалось от многочисленных мистических религий того времени тем, что очищение души и соединение с божеством достигались при помощи математики. Это учение было столь влиятельным, что многие ученики Пифагора обожествляли своего учителя.

Пифагор родился на острове Самос в Эгейском море. Юношей он отправился в странствия, продлившиеся более 20 лет. Прежде всего Пифагор посетил Милет, чтобы встретиться с Фалесом. Фалес передал ему все знания, какие мог, и побудил его плыть в Египет.

Много лет Пифагор провёл в храмах Египта, изучая астрономию и геометрию. После этого 10 лет он находился в Вавилонии, а затем вернулся на Самос. Но власть тирана Поликрата пришлась ему не по нраву, и он переехал в город Кротон на юге Италии (там было так много древнегреческих колоний, что эта область Италии называлась в то время Великой Грецией). В Кротоне у Пифагора сначала было 200 учеников, а потом более 2000. Он проповедовал презрение к славе и богатству, уважение к старшим, воздержание от мяса, отказ от вина; его ученики принимали обет щадить и не губить животных, не вредных для человека. Пифагорейцы считали своё имущество общим и не брали плату за обучение тех, кто к ним приходил.

Важную роль в воспитании учеников Пифагор отводил музыке. Он первым разработал теоретические основы музыки и установил, что числовые отношения играют в музыке большую роль. Это побудило Пифагора обратить внимание на важность количественных соотношений в познании природы; ему принадлежит тезис «Все вещи суть числа». В его учении числа и мистика чисел играли важную роль. Например, Пифагор учил, что небесным богам нужно приносить нечётное, а подземным — чётное число приношений.

Ученики Пифагора были разделены на две группы. В первой группе были начинающие. Их называли акусматиками, т. е. слушателями — от греческого ακουστός (слышимый), потому что они прослушивали обобщённый свод знаний без подробного изложения и слушали поучения без доказательств. Более продвинутых учеников Пифагора называли математиками, т. е. познавателями — от греческого μάθημα (познание, наука); они изучали всю суть науки и занимались доказательствами. Школа Пифагора существовала много столетий после его смерти. Именно в этой школе была обнаружена и доказана иррациональность числа $\sqrt{2}$ (несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны).

Сведения о том, как именно доказывал Пифагор теорему, которую связывают теперь с его именем, до нашего времени не дошли. Сохранились лишь неясные упоминания о «знаменитом чертеже» Пифагора, причём уже древнегреческие историки не были уверены, что этот чертёж относился именно к теореме Пифагора. Ситуация осложняется ещё и тем, что у пифагорейцев был обычай все свои открытия приписывать Пифагору.

Золотое сечение. Золотое сечение было открыто Пифагором, оно играет большую роль в пифагорейской теории музыки. Первое дошедшее до нас письменное упоминание о золотом сечении содержится в «Началах» Евклида. Но там оно называется делением отрезка «в крайнем и среднем отношении». В 1509 г. известный итальянский математик Лука Пачолли использовал термин «божественная пропорция». А термин «золотое сечение» ввел немецкий математик Мартин Ом (1792—1872), младший брат знаменитого физика Георга Ома, в честь которого названа единица измерения сопротивления.

Золотое сечение тесно связано с правильным пятиугольником и соответственно с правильной пятиконечной звездой (пентаграммой). Пятиконечная звезда служила опознавательным знаком для пифагорейцев, она символизировала здоровье.

Клавдий Птолемей использовал равнобедренный треугольник с углом при основании в 72°, также связанный с золотым сечением, для составления таблиц хорд, аналогичных таблицам синусов. Эти таблицы были ему нужны для астрономических вычислений.

Интересующимся историей математики мы рекомендуем книгу [13].

Заключение

Дорогие школьники!

Как и в конце 7 класса, полезно теперь подвести итоги по 8 классу. Вы узнали много нового о геометрических фигурах, и не только о треугольниках и окружностях, которые были в центре нашего внимания в 7 классе, но и о различных видах четырёхугольников, а также о правильных многоугольниках. Вы знаете теперь, что такое тригонометрические функции угла и как они помогают изучать свойства геометрических фигур и решать геометрические задачи. Всё изученное в 8 классе понадобится и в 9 классе, где вы продолжите заниматься планиметрией, и затем в старших классах, когда вы будете изучать стереометрию. Чтобы проверить себя, насколько вы усвоили материал 8 класса, откройте вопросы для повторения к каждой из глав (стр. 32, 74—76, 119—120) и ответьте на эти вопросы.

Напомним самое главное из учебника 8 класса, что вы должны твёрдо знать:

- признаки и свойства параллельных прямых, основная теорема о параллельных прямых;
- теоремы о пересечении биссектрис треугольника и об окружности, вписанной в треугольник;
- теоремы о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника и об окружности, описанной около треугольника;
- свойство сторон и признак описанного четырёхугольника;
- свойство углов и признак вписанного четырёхугольника;
- теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него;
- свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника и ромба;
- теоремы о средней линии треугольника и о средней линии трапеции;
- теорема Фалеса;
- теоремы о пересечении медиан треугольника и о пересечении высот треугольника;
- теорема Пифагора и обратная ей;
- теоремы синусов и косинусов;
- теорема о биссектрисе треугольника;

- признаки подобия треугольников;
- теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной.

Кроме того, вы должны знать формулу суммы углов выпуклого многоугольника, как определяются основные тригонометрические функции, что такое основное тригонометрическое тождество и формулы приведения, что называется средним арифметическим и средним геометрическим двух отрезков и что такое золотое сечение.

Все эти знания вы должны уметь использовать при решении задач. Если вы хорошо усвоили всё перечисленное выше, то можете спокойно отдыхать летом — успехи в изучении геометрии в 9 классе вам обеспечены.

Ответы и указания

Глава 4

1. а) Да; да; да; да. **2.** а) Да; да; да; да. **3.** а) Да. **4.** а) Да. г) Два. **5.** а) 120° и 60°. б) 25°. г) 7 см. **6.** а) 107° и 73°. б) 110°. г) 5 см. **7.** б) 108°. в) Два. **8.** б) 113° или 67°. **9.** а) 5 см. б) $90° + \alpha$. в) 5 см, 1 см, 1 см, 9 см, 9 см, 5 см. **10.** б) 35°. в) 2 см. **11.** а) 5 см. б) 10 см. в) 110°, 35° и 35°. **12.** а) $\frac{a}{2}$. в) 14 см.

16. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **27.** Указание. Воспользоваться задачей 26. **29.** 7 см. **30.** Прямую, параллельную данным прямым и находящуюся на равных расстояниях от них. **31.** Прямую, параллельную данным прямым и находящуюся на равных расстояниях от них. **32.** Луч с началом на стороне BA, параллельный стороне BC. **34.** Два. **35.** Указание. Сначала построить три параллельные прямые так, чтобы расстояния между первой и второй, а также между второй и третьей прямыми, равнялись половине данной высоты. **38.** $P - 2a$. Указание. Воспользоваться задачей 11 г). **39.** 34 см или 38 см. **41.** Указание. Учесть, что центр описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к любой его стороне. **42.** Указание. Продолжить отрезок AD до пересечения с окружностью, описанной около треугольника, и соединить указанную точку пересечения отрезком с точкой M.

Глава 5

43. б) 900°. в) 6. г) 720°. д) Периметры равны. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABD = \triangle DCA$. е) $\frac{n(n-3)}{2}$. ж) Нельзя. **44.** б) 150°. в) 9. г) 360. д) Периметры равны. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ACD = \triangle ACE$. е) Не может. Указание. Воспользоваться задачей 43 е). ж) 998. з) 2. **45.** а) Периметры равны. б) 36°, 72°, 108°, 144°. в) 50°, 70°, 40°. г) 30 см. **46.** а) Периметры равны. г) $6r$. **47.** б) 10 см. д) 72. **48.** а) 108°; 144°. д) 120. **49.** а) 15 см. б) 30°, 150°, 30° и 150°. г) 2 см. и) Три. **50.** а) 24 см. б) 60°. г) 18 см или 9 см. **51.** г) $ACBDA$. **52.** г) $ABDCA$. **55.** а) 30°, 60° и 90°. б) 20 см. **57.** а) 50°. б) 10 см. д) 40°, 140°, 140°, 40°. е) 20 см. **58.** а) 120°. б) 15 см. д) 60°, 120°, 120°, 60°. е) 7 см. **59.** б) Нет; да. в) О и Х. г) Бесконечно много. **60.** б) Две; бесконечно много; одну. в) А, Х, Е и О. **61.** а) 13 см. е) 2 см, 3 см и 4 см. **62.** а) 14 см. в) 10 см. **63.** а) 10 см и 30 см. в) 3 см. г) 11 см. **64.** а) 18 см и 12 см. в) 10 см. г) 10 см. е) $\frac{1}{2}|a - b|$. ж) $2a$, $3a$ и $4a$. **65.** а) 6 см. б) 40°. г) Указание. Провести медиа-

ны треугольника ABC. **66.** г) У к а з а н и е. Сначала построить высоты треугольника AMB. **67.** 72°, 72°, 72°, 144°. **70.** $k = 4$, $n = 3$ или $k = 3$, $n = 4$. **71.** Да (девятиугольник). У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 43 е). **72.** У к а з а н и е. Пусть $A_1A_2...A_n$ — данный многоугольник, B_1, B_2, ..., B_n — точки касания его сторон A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 и окружности. Предположить, что окружность и какая-то вершина A_k лежат по разные стороны от прямой A_1A_2, и рассмотреть ломаную $A_2A_3...A_{k-1}$, которая, с одной стороны, должна пересекать треугольник $B_{k-1}A_kB_k$, а с другой стороны, пересечь его она не может. **73.** Точка пересечения диагоналей четырёхугольника. У к а з а н и е. Сравнить сумму расстояний от произвольной точки до двух противоположных вершин с длиной диагонали, соединяющей эти вершины. **76.** 180°. **78.** У к а з а н и е. Рассмотреть точку пересечения прямой, содержащей диагональ AD данного четырёхугольника $ABCD$, с окружностью, описанной около треугольника ABC. **79.** У к а з а н и е. Пусть, например, в четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов A и D не меньше 180° (см. задачу 68). Рассмотреть окружность, касающуюся стороны AB и лучей BC и AD, а также касательную к ней, проходящую через точку пересечения прямых AB и CD (или параллельную этим прямым, если $AB \parallel CD$).
80. 160°. **81.** а) 5; б) 6. **84.** У к а з а н и е. Пусть O — центр окружности, M — точка пересечения прямых OA_2 и A_1A_4; рассмотреть треугольники OA_4M и MA_1A_2. **85.** У к а з а н и е. Пусть $A_1A_2...A_8$ — искомый восьмиугольник, O — его центр. Сначала построить треугольник A_1OA_2. **88.** 36 см или 24 см. **94.** 18 см или 24 см. **95.** 28 см или 38 см. **96.** 2 см и 4 см. **108.** 60°.
110. У к а з а н и е. Через вершину меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне. **111.** У к а з а н и е. Провести диагональ данного четырёхугольника, разделяющую его на два треугольника — первый и второй; затем разбить плоскость параллельными прямыми на полосы так, чтобы для любых двух соседних полос одну из них можно было полностью покрыть плитками, равными первому треугольнику, а другую — равными второму треугольнику. **112.** 3 см или 12 см.

Глава 6

131. а) 0,75. Не изменится. б) 3,2 см. в) Да; да. г) 4 см. е) 16 см. **132.** а) 0,6. Не изменится. б) 12 дм. в) Нет; да. г) 5 см, 10 см, 5 см, 10 см. е) 20 дм. ж) 10 см.
133. а) $\frac{a}{\sin\alpha}$ и $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a$. б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$. в) $\frac{1}{2}$. д) $\sqrt{2}AB$. ж) $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{5}$. з) 84 мм.
134. а) $\frac{a}{\cos\alpha}$ и $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}a$. б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$. в) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. ж) 60°. з) 12 дм. **135.** а) 10 см, 3,6 см, 6,4 см. б) 5 см и $\sqrt{41}$ см. в) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. г) 14 см и 34 см. е) 45°, 45° и 90°. **136.** а) 12 см, 12,8 см и 9,6 см. б) 15 см и $6\sqrt{13}$ см. в) 2. е) 30°, 60° и 90°. **137.** а) $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 150° = \frac{1}{2}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 135° = -1$, $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 45° = 1$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 135° = -1$, $\operatorname{ctg} 150° = -\sqrt{3}$. е) $\angle C = 30°$, $AC \approx 16{,}9$, $BC \approx 17{,}7$. ж) 12. з) $\frac{b \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$. и) 7. Не изменится. к) $\frac{\sin\gamma \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\gamma)}$. **138.** а) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ или $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. г) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ или $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$. е) $\angle B = 60°$, $AB \approx 10{,}4$, $BC \approx 11{,}5$; ж) 30 см. з) $h\frac{\sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)}$. к) $\frac{a\cos(\beta-\gamma)}{\sin 2(\beta+\gamma)}$. **139.** а) $a\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. б) Тупоугольным. в) 7. **140.** а) $\frac{m-n}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. б) Остроугольным. в) $2\sqrt{7}$. **141.** а) $\angle A \approx 38°34'$, $\angle B \approx 62°58'$, $\angle C \approx 78°28'$. б) $\frac{25}{6}$. в) 90°. г) 15 и 20. д) 36 см. ж) $\frac{2}{5}$. з) $\frac{11}{9}$. **142.** а) $a \approx 16{,}8$, $\angle B \approx 39°56'$, $\angle C \approx 61°04'$. б) $\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma}$, где $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{2}$, если $\alpha \geqslant \beta$, и $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$, если $\alpha < \beta$. в) 90°. г) 5 см и 4 см. д) 87,5 см. з) $\frac{7}{6}$. **143.** б) $\angle A = 70°$, $\angle B = 60°$, $\angle E = 60°$, $\angle F = 50°$. в) 6. г) 6. **144.** б) 70°. в) 2,5 см. г) 23 см. **145.** а) 30 см. б) 19 см. в) 5 см и 3 см. ж) $\cos A$. з) 8 см и 2 см. **146.** б) 2 см. в) 15 см и 5 см. д) $\frac{ab}{b-a}$. ж) $-\cos A$. з) 15 см и 9 см. **147.** а) 12 см. б) 8 см. в) 6 см. д) 50 см. **148.** а) 18 см. б) 6 см. в) 2. д) 5 см. **151.** 0,8. **152.** 30° и 60°. **153.** 0,96. **156.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **157.** 15. **158.** $\frac{\sin 2\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta)}m$. **159.** 16 см. **160.** 105°. **161.** $\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$. **164.** 9 см. **165.** 14 см и 21 см. **166.** 15 см и 3 см.

171. Указание. Воспользоваться задачей 142 ж). **173.** Указание. Воспользоваться теоремой косинусов применительно к треугольнику ABD, задачей 172 и теоремой о биссектрисе треугольника. **174.** 16 см. **175.** $\frac{960}{11}$ см. **177.** Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате касательной. **178.** Указание. Воспользоваться теоремой об угле между касательной и хордой. **180.** $3\sqrt{3}d$. **181.** $\sqrt{63}$ см или $\sqrt{39}$ см. **182.** 20. **183.** Необязательно; да; да. **185.** Указание. Продолжить отрезок AM до пересечения с прямой BC. **186.** Указание. Продолжить отрезок AM до пересечения с прямой BC. **187.** Указание. Продолжить отрезок AC за точку A на отрезок $AD = AB$. **189.** 1 : 2. **190.** 8 см. **191.** 10 см.

Задачи повышенной трудности

198. Указание. Сначала доказать, что $\angle BCM + \angle BAM = 180°$. **199.** Указание. Провести отрезки AP, BC и AD. **200.** Указание. Сначала доказать, что один из углов, образованных прямой AB и касательной, равен углу AMP. **201.** Указание. Провести общую касательную к данным окружностям. **202.** Указание. Из центров окружностей провести перпендикуляры к прямой BC. **203.** Указание. Через вершину C треугольника ABC провести прямую, параллельную AB, и отметить точку M так, чтобы проведённая прямая была серединным перпендикуляром к отрезку AM. **204.** Указание. Заметить, что проведённые прямые содержат биссектрисы внешних углов треугольника ABC. **205.** Указание. Рассмотреть треугольник, вершинами которого являются точки отражения шара, и воспользоваться задачей 204. **206.** Четыре. **207.** Указание. Провести серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC. **208.** Указание. Сравнить углы ABO и CBH. **209.** Указание. Сравнить углы EAD и EDA. **210.** Указание. Сравнить углы AOD и OAD. **211.** в) Указание. Воспользоваться задачей 211 б). **212.** Указания. а) Сначала построить какой-нибудь треугольник с данной стороной и данным углом; б) сначала построить треугольник, сторона которого равна данному отрезку, а противолежащий угол — данному углу. **213.** Указание. Учесть, что диаметр BA данной окружности лежит на серединном перпендикуляре к одной из сторон искомого треугольника. **214.** Не более двух. **215.** 6. **216.** Указание. Продолжить через одну стороны шестиугольника. **217.** Указание. Сначала построить равносторонний треугольник со стороной, равной $a_1 + a_2 + a_3$. **218.** Указание. а) Сравнить суммы противоположных сторон данного четырёхугольника. **220.** $\angle A = 75°$, $\angle B = 135°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 90°$. **221.** Указание. Достроить данный треугольник до параллелограмма. **222.** Указание. Сначала доказать (методом от противного), что точка пересечения диагоналей данного четырёхугольника делит каждую диагональ пополам. **223.** Указание. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA данного параллелограмма $ABCD$; рассмотреть треугольники AO_1O_4, BO_1O_2, CO_3O_2 и DO_3O_4. **224.** Указание. Рассмотреть треугольники BKP, ABC и CQT. **225.** Указание. Через указанную точку провести прямую, параллельную AB. **226.** Указание. Провести медиану DM треугольника ABD. **227.** Прямая, параллельная данной прямой и равноудалённая от неё и от данной точки. **228.** Указание. Продолжить отрезки AH и AK до пересечения с прямой BC. **229.** Указание. Провести средние линии треугольника ABC. **230.** Указание. Воспользоваться задачей 229. **231.** Указание. Сначала доказать, что $AD = BC$, а затем провести высоты BH и CK треугольников ABO и CDO. **232.** Указание. Воспользоваться задачами 61 д) и 62 д).

233. Указание. Воспользоваться задачей 232. **234.** Указание. Воспользоваться свойствами параллелограмма и средней линии треугольника. **235.** Указание. Пусть M — середина отрезка A_1A_4. Сначала доказать, что точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ACM. **236.** Указание. Воспользоваться задачей 207. **237.** Указание. Учесть, что указанные треугольники имеют общую окружность Эйлера. **238.** Указание. Воспользоваться задачей 237. **239.** Указание. Учесть, что указанные точки лежат на одной окружности. **240.** Указание. Сначала построить треугольник, одна сторона которого равна половине данного отрезка, другая — данной диагонали, а противолежащий ей угол равен 45°. **241.** Указание. Сначала построить треугольник, одна сторона которого равна данной стороне ромба, другая — половине данного отрезка, а противолежащий ей угол равен 135°. **242.** Указание. Сначала построить треугольник, сторона которого равна данному отрезку, а прилежащие к ней углы равны 45° и 22°30′. **243.** Указание. Сначала построить треугольник, две стороны которого равны данным диагоналям, а угол между ними равен данному углу. **244.** Указание. Сначала построить равнобедренный треугольник, основание которого равно сумме оснований трапеции, а боковая сторона равна диагонали трапеции. **245.** Указание. Сначала доказать, что если концы одного из двух взаимно перпендикулярных отрезков лежат на противоположных сторонах квадрата (или их продолжениях), а концы другого — на двух других противоположных сторонах (или их продолжениях), то эти отрезки равны. **246.** Указание. Выразить отрезки CD, AE и BF через AB и угол A. **247.** Прямая, содержащая высоту AH треугольника ABC. **248.** Указание. Доказать, что эта величина равна диаметру данной окружности. **249.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 73. **250.** Указание. Выразить указанное произведение через синусы углов треугольника и радиус описанной около него окружности. **251.** Указание. Достроить треугольник ABC до параллелограмма. **252.** Указание. Воспользоваться теоремой косинусов. **253.** Указание. Воспользоваться задачами 145 ж) и 146 ж). **254.** Указания. а) Сначала, пользуясь задачей 237, доказать, что точка N_1 — ортоцентр треугольника MBC, а затем воспользоваться формулой из задачи 253 применительно к треугольникам ABC и MBC. б) Воспользоваться тем, что (согласно доказанному в задаче 254 а) $NM_1 = N_1M = AH$ и $NM_1 \parallel AH$. **255.** Указания. а) Сначала доказать, что $\sin M = \sin B$. б) Для доказательства равенства дуг, на которые опираются соответствующие накрест лежащие углы, воспользоваться задачей 255 а). **256.** Указание. Воспользоваться задачами 254 б) и 255 б). **257.** Указание. Воспользоваться задачей 256. **258.** Указания. При $\alpha + \beta \neq 180°$ рассмотреть: а) сторону BC треугольника ABC с углами B и C, равными α и β; б) высоту AA_1 этого треугольника и воспользоваться задачей 253. **259.** Указание. Сначала, пользуясь задачей 258, доказать, что $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 (A + B) = 2\,[1 - \cos A \cos B \cos (A + B)]$. **260.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 73 и задачей 258. **261.** Указание. Воспользоваться задачей 260. **262.** Указание. Описать около данного треугольника окружность, достроить его до правильного семиугольника и воспользоваться задачей 260. **263.** Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе треугольника. **264.** Указание. Провести общую касательную к данным окружностям и прямую AB. **265.** Указание. Рассмотреть окружность, описанную около треугольника ABC. **266.** Указание. На луче AB отметить точку D так, что $AD = AC$. **267.** Указание. Через точку M провести прямую, параллельную одной из сторон угла, и рассмотреть образовавшиеся подобные треугольники. **268.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников AOD и BOC, а также теоремой Пифагора. **269.** Указание. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, O — точка пересечения диагоналей, M — середина одного из оснований; доказать, что прямые EM и OM проходят через середину другого основания. **270.** Указание. Через точку K провести прямую, параллельную AB, и доказать, что прямая CK делит отрезок AB пополам. **271.** Указание. Сначала доказать, что $DF = DE$ и $AF = FE$. **272.** Указание. Пусть E и F — точки пересечения прямых MP и MQ со сторонами данного угла. Сначала доказать, что треугольники OEF и OPQ, а также треугольники OPQ и ORS подобны. **273.** Указание. Провести высоту AE треугольника ABC и сначала доказать, что треугольники AEC и BHD подобны. **274.** Указание. Воспользоваться ответом к задаче 220. **275.** Указание. Воспользоваться подобием образовавшихся треугольников. **276.** Указание. Сначала доказать, что $AD \parallel BC$. **277.** Указание. Пусть $\angle ACN = \alpha$, $\angle ACK = \beta$, $\angle CKN = \gamma$; используя равенство $KQ \cdot QN = (AC - CQ)(AC + CQ)$ и теорему синусов применительно к треугольникам CKQ и CNQ, выразить CQ через AC, α, β и γ. **278.** Указание. Пользуясь теоремой об отрезках пересекающихся хорд, задачей 210 и теоремой пункта 73, доказать, что $(R + d)(R - d) = 2Rr$. **279.** Указания. Продолжить одну из биссектрис данного треугольника до пересечения с описанной около него окружностью и, имея в виду задачу 210, воспользоваться: а) задачей 260; б) задачами 278 и 279 а); в) задачей 279 а); г) задачами 279 а), в). **280.** Указание. Пусть $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Сначала доказать тождество $\sin 3\varphi = 4 \sin \varphi \sin (60° + \varphi) \sin (60° - \varphi)$ и, пользуясь им, получить формулу $AB_1 = 4R \sin \beta \sin \gamma \sin (60° + \gamma)$ и аналогичную формулу для AC_1; после чего, применив теорему косинусов, доказать, что $B_1C_1 = 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. **281.** Указания. Сначала провести диагонали четырёхугольника с вершинами: а) A, B, A_1 и B_1; б) C, D, A_1 и B_1. **282.** Указание. Разделить большее основание трапеции на $n + 1$ равных частей. **283.** Задача не имеет решения, если точка C — середина отрезка AB. Указание. Воспользоваться свойствами биссектрисы треугольника и биссектрисы внешнего угла треугольника (задача 141 е). **284.** Указание. Воспользоваться методом подобия. **285.** Указание. Воспользоваться задачей 171. **286.** Указание. Воспользоваться методом подобия. **287.** Указание. Воспользоваться результатом пункта 83. **288.** Указание. Воспользоваться задачей 250 и методом подобия.

Предметный указатель

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Э

Список литературы

Теоретический материал

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. В 2 ч. Ч. 2. Планиметрия / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1957 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
2. *Аристотель.* Евдемова этика / Аристотель. — М.: ИФ РАН, 2005.
3. *Бутузов В. Ф.* Планиметрия: пособие для углубл. изуч. математики / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк и др.; под ред. В. А. Садовничего. — М.: Физматлит, 2005.
4. *Вейль Г.* Симметрия / Герман Вейль. — М.: Наука, 1968.
5. *Гарднер М.* Математические новеллы / М. Гарднер. — М.: Мир, 2000.
6. *Гильберт Д.* Основания геометрии / Д. Гильберт. — Л.: ОГИЗ, 1948 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
7. *Евклид.* Начала. Кн. I—VI / Евклид. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
8. *Евклид.* Начала. Кн. VII—X / Евклид. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
9. *Евклид.* Начала. Кн. XI—XV / Евклид. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
10. *Коксетер Г. С. М.* Новые встречи с геометрией / Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. — М.: Наука, 1978 или на сайте http://ilib.mirror1.mccme.ru/
11. *Курант Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. — М.: МЦНМО, 2001.
12. *Радемахер Г.* Числа и фигуры / Г. Радемахер, О. Теплиц. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
13. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. — М.: Наука, 1984.
14. *Широков П. А.* Краткий очерк основ геометрии Лобачевского / П. А. Широков. — М.: URSS, 2009.

Задачный материал

1. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение / И. И. Александров. — М.: Учпедгиз, 1950.
2. *Васильев Н. Б.* Прямые и кривые / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. — М.: МЦНМО, 2006.

3. *Гордин Р. К.* Геометрия. Планиметрия: задачник: 7—9 кл. / Р. К. Гордин. — М.: МЦНМО, 2006.
4. *Моденов П. С.* Сборник задач по специальному курсу элементарной математики / П. С. Моденов. — М.: Высшая школа, 1960.
5. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.
6. *Сивашинский И. Х.* Неравенства в задачах / И. Х. Сивашинский. — М.: Наука, 1967.
7. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия / И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1982. — Вып. 17. — (Библиотечка «Квант»).
8. *Шклярский Д. О.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия. Планиметрия / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. — М.: Физматлит, 2002.
9. *Штейнгауз Г.* Сто задач / Г. Штейнгауз. — М.: Наука, 1986.

Интернет-ресурсы

1. http://ilib.mirror1.mccme.ru/
2. http://window.edu.ru/window/library
3. http://www.problems.ru/
4. http://kvant.mirror1.mccme.ru/
5. http://www.etudes.ru/
6. http://www.koob.ru/gardner/

Интернет-ресурсы на английском языке

1. http://mathworld.wolfram.com/
2. http://forumgeom.fau.edu/

Оглавление

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Прасолов Виктор Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

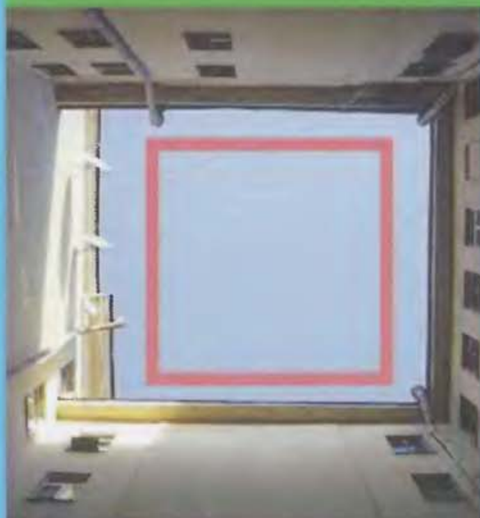
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *П. А. Бессарабова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Художники *О. П. Богомолова, И. А. Андреев*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *П. А. Тимачёва, Л. С. Александрова, И. П. Ткаченко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 01.03.11.
Формат $70 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура FreeSetC. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 10,65 + форз. 0,48. Тираж 5000 экз. Заказ № 27741 (Sm-Sm).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

МГУ - ШКОЛЕ



ISBN 978-5-09-019635-2

9 785090 196352

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО